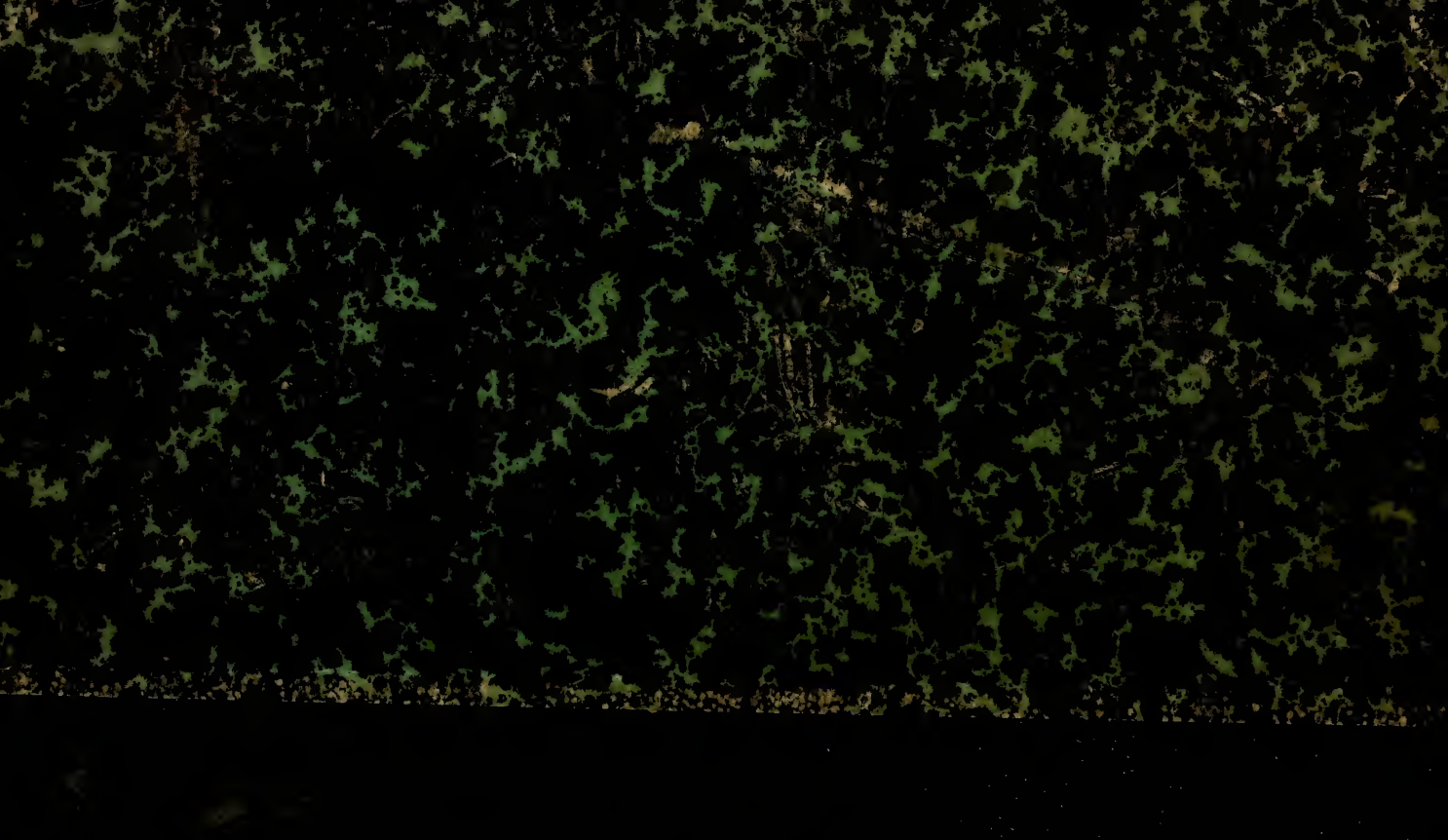
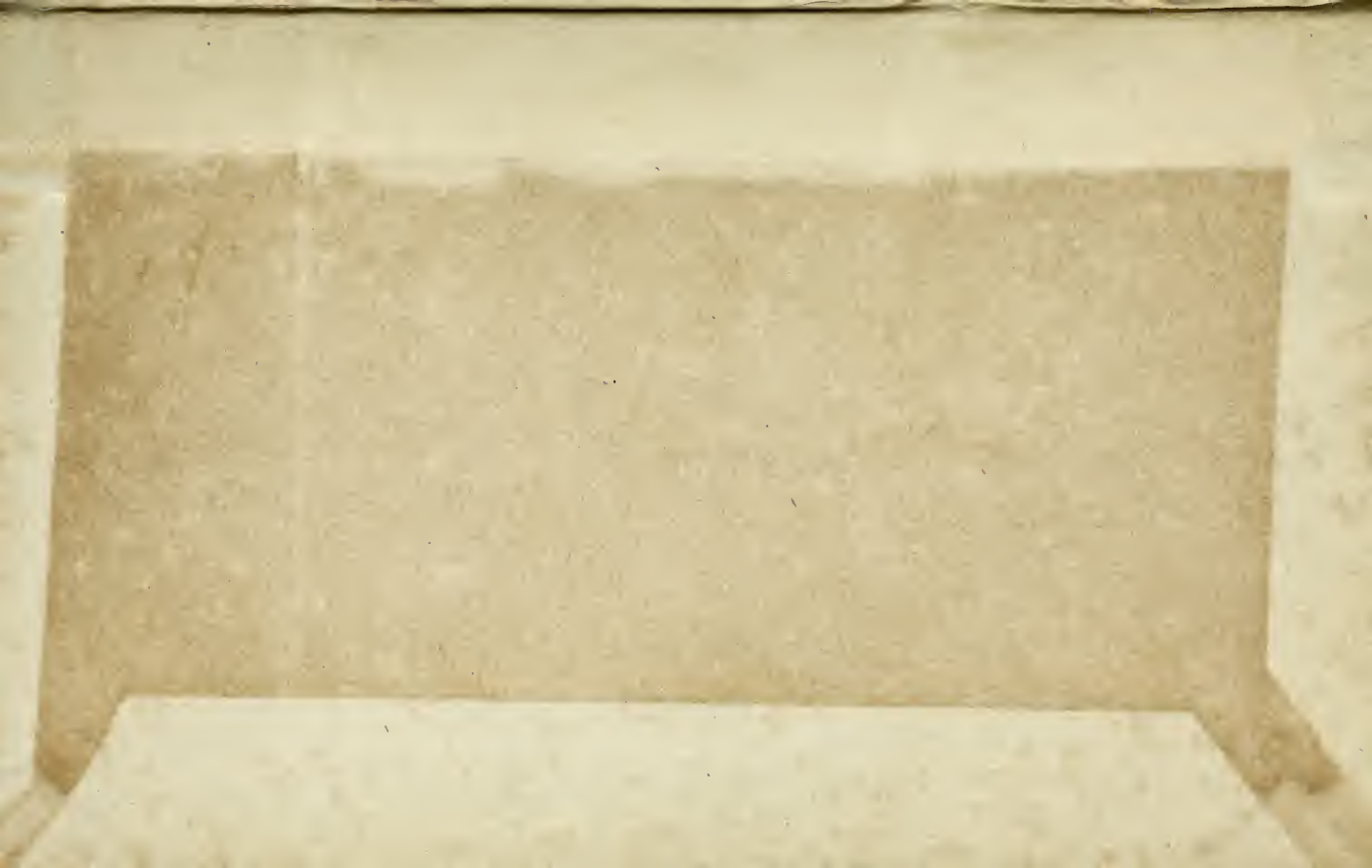




НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ
АНАЛИТИЧЕСКОЙ
ГЕОМЕТРІИ.

НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ;

Relinquamus aliquid quo
nos vixisse testemur.

Сочиненіе
Я. А. СЕВАСТЬЯНОВА,
Корпуса Инженеровъ Путей Сообщенія
Капитана и кавалера.

ИМПЕРАТОРСКОЮ Академіею Наукъ
принято съ отличнымъ одобреніемъ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
Печатано при ИМПЕРАТОРСКОЙ Академіи Наукъ.
1819.

СОДЕРЖАНІЕ.

Опредѣленія и первоначальныя понятія.

Предметъ Аналитической Геометріи — Раздѣленіе оной — Способъ разсматриванія линіи вообще — Опредѣленіе положенія точки и линіи на плоскости — Что называется *уравненіемъ* линіи, и *геометрическимъ мѣстомъ* уравненія — Знаки координатъ; уравненія осей, начала, и прямыхъ параллельныхъ осямъ — Общій способъ выводить уравненіе какой ни есть линіи — Приложеніе къ кругу — Общій способъ опредѣлять видъ линіи изъ даннаго уравненія оной — Приложеніе къ кругу — Общій способъ опредѣлять координаты точки пересѣченія двухъ кривыхъ, данныхъ ихъ уравненіями. . . . . § 1 — § 11.

О прямой линіи и кругѣ.

Общее уравненіе прямой линіи — О числѣ условій, необходимомъ для опредѣленія прямой линіи вообще — Уравненіе прямой, проходящей чрезъ начало координатъ — Уравненіе прямой проходящей чрезъ данную точку — Уравненіе прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки — Уравненіе прямой параллельной данной и проходящей чрезъ данную точку — Вы-

раженія координатъ точки пресѣченія двухъ данныхъ прямыхъ — Изслѣдованіе сихъ выраженій — Выраженіе части прямой заключающейся между двумя данными точками — Выраженія синуса, косинуса и тангенса угла, составляемаго двумя данными прямыми — Условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ — Уравненіе прямой перпендикулярной къ данной и проходящей чрезъ данную точку — Выраженіе длины перпендикуляра опущеннаго изъ данной точки на данную прямую — Общее, и частныя уравненія круга — О числѣ условій, необходимомъ для опредѣленія уравненія круга, вообще — Уравненіе круга проходящаго чрезъ три данныя точки — Уравненіе касательной къ кругу, проведенной чрезъ точку внѣ онаго — Геометрическое построеніе касательной къ кругу, проведенной чрезъ точку внѣ онаго — Уравненіе касательной къ кругу, проведенной чрезъ точку на ономъ — Касательная въ кругѣ перпендикулярна къ радіусу, проведенному чрезъ точку касанія. . . . . § 12 — § 33.

О раздѣленіи кривыхъ линій на порядки и перемѣнѣ координатъ.

Раздѣленіе кривыхъ линій на порядки — Къ чему служитъ перемѣна координатъ — Общій способъ переходить изъ уравненія какой ни есть линіи къ другому уравненію оной — Общія формулы для перемѣны координатъ — Частныя формулы для перемѣны координатъ косоугольныхъ — Частныя формулы для перемѣны координатъ косоугольныхъ въ прямоугольныя, и обратно — Перемѣна координатъ прямоугольныхъ въ прямоугольныя же координаты. § 34 — § 40.

Объ эллипсисѣ.

Уравненіе эллипсиса отнесеннаго къ центру и осямъ — Изслѣдованіе эллипсиса — Свойство центра въ эллипсисѣ; опредѣленіе что есть *діаметръ* — Построенія эллипсиса: по точкамъ, и по непрерывному движенію — О дополнительныхъ хордахъ — Наибольшій и наименьшій углы, составляемые дополнительными хордами между собою — Уравненіе эллипсиса, отнесеннаго къ вершинѣ — Свойства параметра въ эллипсисѣ — Квадраты ординатъ относятся между собою какъ произведенія изъ соотвѣтствующихъ имъ абсцисъ, щитая сіи абсцисы отъ вершинъ — Уравненіе эллипсиса отнесеннаго къ сопряженнымъ діаметрамъ — Переходъ изъ уравненія эллипсиса отнесеннаго къ сопряженнымъ діаметрамъ къ уравненію онаго, отнесеннаго къ осямъ — Прямоугольникъ изъ осей равенъ параллелограмму изъ сопряженныхъ діаметровъ — Сумма квадратовъ изъ сопряженныхъ діаметровъ равна суммѣ квадратовъ изъ осей — Уравненія для рѣшенія вопросовъ относительно къ сопряженнымъ діаметрамъ и осямъ — Общее свойство дополнительныхъ хордъ и сопряженныхъ діаметровъ, и построеніе по оному сихъ послѣднихъ — Построеніе сопряженныхъ діаметровъ равныхъ между собою — Уравненіе касательной, проведенной къ эллипсису чрезъ точку данную внѣ онаго — Уравненіе касательной къ эллипсису, проведенной чрезъ точку, данную на ономъ — Выраженіе подкасательной въ эллипсисѣ; построеніе касательной къ эллипсису помощію круга — Уравненіе нормальной въ эллипсисѣ; выраженія поднор-

мальной, касательной, и нормальной — Положеніе касательной относительно къ радіусамъ векторамъ, проходящимъ чрезъ точку касанія — Геометрическія построенія касательныхъ къ эллипсису: проведенной чрезъ точку на ономъ, и проведенной чрезъ точку внѣ онаго — Опредѣлить аналитически положеніе касательной къ эллипсису, проведенной параллельно данной прямой — Проведеніе касательныхъ къ эллипсису посредствомъ сопряженныхъ діаметровъ — Полярное уравненіе эллипсиса. . . . . § 41 — § 65.

Объ иперболѣ.

Уравненіе иперболы, отнесенной къ ея центру и осямъ — Изслѣдованіе иперболы — Свойство центра въ иперболѣ; сравненіе уравненій иперболы и эллипсиса; уравненіе иперболы равносторонней — Построенія иперболы: по точкамъ и, по непрерывному движенію — О дополнительныхъ хордахъ — Уравненіе иперболы отнесенной къ вершинѣ — Свойства параметра въ иперболѣ — Квадраты ординатъ относятся между собою какъ произведенія изъ соотвѣтствующихъ имъ абсцисъ, щитая сіи абсцисы отъ вершинъ — Уравненіе иперболы отнесенной къ сопряженнымъ діаметрамъ — Переходъ изъ уравненія иперболы отнесенной къ сопряженнымъ діаметрамъ къ уравненію оной, отнесенной къ ея центру и осямъ — Прямоугольникъ изъ осей равенъ параллелограмму изъ сопряженныхъ діаметровъ — Разность квадратовъ изъ сопряженныхъ діаметровъ равна разности квадратовъ изъ осей — Уравненія для рѣшенія вопросовъ относитель-

нѣ къ сопряженнымъ діаметрамъ и осямъ — Общее свойство дополнительныхъ хордъ и сопряженныхъ діаметровъ, и построеніе по оному сихъ послѣднихъ — О равныхъ сопряженныхъ діаметрахъ — Уравненіе касательной проведенной къ иперболѣ чрезъ точку данную внѣ оной — Уравненіе касательной къ иперболѣ, проведенной чрезъ точку данную на оной — Выраженіе подкасательной въ иперболѣ; построеніе касательной къ оной помощію иперболы равносторонней — Уравненіе нормальной къ иперболѣ; выраженія поднормальной, касательной, и нормальной — Положеніе касательной относительно къ радіусамъ векторамъ, проходящимъ чрезъ точку касанія — Геометрическія построенія касательныхъ къ иперболѣ: проведенной чрезъ точку на оной, и проведенной чрезъ точку внѣ оной — Опредѣлить аналитически положеніе касательной, проведенной къ иперболѣ параллельно данной прямой — Проведеніе касательныхъ къ иперболѣ помощію сопряженныхъ діаметровъ — Что называется *асимптотами* вообще; уравненія асимптотъ въ иперболѣ — Положеніе касательныхъ въ иперболѣ относительно къ ея асимптотамъ — Уравненіе иперболы, отнесенной къ ея асимптотамъ — Что называется *степенью* иперболы; объ иперболахъ сопряженныхъ — Свойство асимптотъ въ иперболѣ, изъ котораго слѣдуетъ построеніе оной по точкамъ — Полярное уравненіе иперболы. . . . . § 66 — § 94.

О параболѣ.

Уравненіе параболы, отнесенной къ ея вершинѣ и оси — Изслѣдованіе параболы — Построе-

нія параболы: по точкамъ, и по непрерывному движенію — Свойство парамегтра въ параболѣ — Квадраты ординатъ относятся какъ абсцисы — Уравненіе параболы отнесенной къ ея діаметрамъ — Уравненіе касательной проведенной къ параболѣ чрезъ точку, данную внѣ оной — Уравненіе касательной къ параболѣ, проведенной чрезъ точку, данную на оной — Выраженіе подкасательной въ параболѣ — Уравненіе нормальной къ параболѣ; выраженія поднормальной, касательной, и нормальной — Положеніе касательной относительно къ радіусу вектору и къ прямой параллельной оси, проведеннымъ чрезъ точку касанія — Геометрическія построенія касательныхъ къ параболѣ: проведенной чрезъ точку на оной, и проведенной чрезъ точку внѣ оной — Опредѣлить аналитически положеніе касательной къ параболѣ, параллельной данной прямой — Положеніе касательной въ параболѣ относительно къ діаметру, проходящему чрезъ точку касанія, и выводимое изъ того построеніе касательной къ параболѣ — Полярное уравненіе параболы. . . . . § 95 — § 109.

Изслѣдованіе уравненій.

Приложеніе общаго способа къ изслѣдованію общаго уравненія кривыхъ линій втораго порядка — Случай когда $4AC > B^2$: *эллипсисъ* — *Кругъ* — Уравненіе не представляетъ никакой линіи — *Точка.* — Случай когда $4AC < B^2$: *илербола* — *Двѣ прямыя линіи* — Случай когда $4AC = B^2$: *парабола* — *Двѣ прямыя параллельныя оси абсцисъ* — Случай когда $A = 0$, и $C = 0$ — Приложеніе перемѣны

координатъ къ изслѣдованію общаго уравненія второй степени съ двумя неопредѣленными; *случай когда* $4AC > B^2$ и $4AC < B^2$ — *Случай, когда* $4AC > B^2$, $4AC < B^2$, и $4AC = B^2$ — *Случай, когда* $B = o$, и $A = C$ — *Случай когда* $A = o$ и $C = o$ — Изслѣдованіе числительныхъ уравненій: $y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y + 2x = o$; $x^2 + y^2 - x + y = 4$; $y^2 - 2xy - x^2 + 2 = o$; $y^2 - 2xy + x^2 + 2y = o$; $xy - x - y = 2$; $y^2 - 2xy + x^2 - 1 = o$; $y^2 - 4xy + 4x^2 = o$; $y^2 + 2xy + x^2 + 1 = o$ — Общее свойство всѣхъ кривыхъ линій втораго порядка — О числѣ условій, необходимомъ для опредѣленія общаго уравненія кривыхъ линій втораго порядка . . . . § 110 — § 133.

О кривыхъ линіяхъ пресѣченія конуса съ плоскостію.

Показать, что кривыя линіи пресѣченія конуса съ плоскостію суть кривыя линіи втораго порядка — Эллипсисъ и круги — Ипербола — Парабола — Точка; двѣ прямыя линіи; одна прямая — Обозрѣніе . . . § 134 — § 139.

О разрѣшеніи по строенію уравненій четвертой и третьей степеней объ одномъ перемѣнномъ.

Общій способъ — Приложеніе общаго способа къ рѣшенію задачи объ удвоеніи куба — Приложеніе общаго способа къ рѣшенію задачи о дѣленіи угла на три части. § 140 — § 142.

О точкахъ и линіяхъ, принимая оныя въ разсужденіе въ пространствѣ.

Опредѣленіе положенія точки въ пространствѣ — Знаки координатъ; общія уравненія точки; уравненія осей, плоскостей, начала координатъ, уравненія плоскостей, параллельныхъ плоскостямъ координатъ, и прямыхъ параллельныхъ осямъ координатъ — Опредѣленіе положенія прямой линіи; общія уравненія прямой линіи — Опредѣленіе положенія какой ни есть кривой линіи; уравненія кривой; что называется *двоякою кривою линіею* — Уравненія прямой проходящей чрезъ данную точку — Уравненія прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки — Выраженіе разстоянія между двумя данными точками — Опредѣлить координаты точки пресѣченія двухъ прямыхъ, и вывести условіе, при которомъ прямыя пресѣкутся — Выраженіе косинуса угла, составляемаго между собою двумя прямыми — Выраженія косинусовъ угловъ, составляемыхъ данною прямою съ осями координатъ — Уравненія прямой по введеніи въ оныя угловъ, составляемыхъ сею прямою съ осями координатъ — Условія перпендикулярности и параллельности двухъ прямыхъ — Уравненія прямой параллельной данной, и проходящей чрезъ данную точку — Выраженіе кратчайшаго разстоянія между двумя данными прямыми. § 143 — § 157.

О плоскости и перемѣнѣ координатъ въ пространствѣ.

Общее уравненіе плоскости — Уравненія слѣдовъ плоскости; условіе когда прямая пер-

пендикулярна къ плоскости. — По даннымъ слѣдамъ плоскости построить какую ни есть точку на оной, и притомъ вывести уравненіе сей плоскости — О числѣ условій, необходимомъ для опредѣленія положенія плоскости вообще; уравненіе плоскости, проходящей чрезъ три данныя точки — Уравненіе плоскости перпендикулярной къ данной прямой и проходящей чрезъ данную точку — Уравненія прямой пересѣченія двухъ данныхъ плоскостей, и условіе когда плоскости не пересѣкутся — Уравненіе плоскости проходящей чрезъ данную точку и параллельной данной плоскости — Уравненіе прямой проходящей чрезъ данную точку и перпендикулярной къ данной плоскости — Выраженіе длины перпендикуляра опущеннаго изъ данной точки на данную плоскость — Выраженіе косинуса угла составляемаго двумя данными плоскостями; условіе когда плоскости между собою перпендикулярны — Выраженія косинусовъ угловъ составляемыхъ какою ни есть плоскостію съ плоскостями координатъ — Переходъ отъ уравненія какой ни есть поверхности къ другому уравненію оной — Формулы для перемѣны направленія координатъ прямоугольныхъ въ прямоугольныя же координаты — Формулы для перемѣны одного только начала координатъ, и формулы для перемѣны начала и направленія координатъ, при переходѣ изъ системы прямоугольной въ прямоугольную же систему . . § 158 — § 171.

О поверхностяхъ втораго порядка.

Раздѣленіе поверхностей на порядки — Способъ выводить уравненіе поверхности; уравненіе шара — Уравненіе поверхности конуса —

Общій способъ изслѣдовать поверхность данную ея уравненіемъ; изслѣдованіе шара — Изслѣдованіе конуса — Что называется *центромъ* поверхностей и *діаметральными* плоскостями; уравненіе поверхностей втораго порядка имѣющихъ центръ — Изслѣдованіе поверхностей втораго порядка имѣющихъ центръ — Эллипсоидъ есть поверхность сомкнутая — Видъ поверхности — Эллипсоидъ вращенія — Шаръ — Иперболоидъ объ одной полѣ есть поверхность несомкнутая — Видъ поверхности — Иперболоидъ о двухъ полахъ есть поверхность несомкнутая — Видъ поверхности. § 172 — § 186.

О плоскостяхъ касательныхъ къ поверхностямъ втораго порядка.

Уравненіе касательной плоскости къ поверхностямъ втораго порядка, имѣющимъ центръ, въ случаѣ когда дана точка касанія — Уравненія нормальной къ тѣмъ же поверхностямъ — Всѣ нормальныя къ поверхности вращенія встрѣчаютъ ось сей поверхности — Опредѣлить аналитически положеніе касательной плоскости къ тѣмъ же поверхностямъ, проходящей чрезъ двѣ данныя точки внѣ поверхности — О кривой линіи отдѣла свѣта отъ тѣни на тѣхъ же поверхностяхъ . . § 187 — § 192.

КЪ ЧИТАТЕЛЯМЪ.

Будучи употребленъ по теоретической части, болѣе зрителемъ нежели дѣйствующимъ лицемъ въ преподаваніи, наблюдалъ я естественнѣйшій методъ онаго. Полковникъ Потье написалъ Traité de Geometrie Déscriptive, Application de Geometrie Déscriptive à l'art du Dessin, и Traité de la Coupe des pierres; занимая мѣсто Репетитора, переводомъ сихъ сочиненій я ознакомилъ моихъ соотечественниковъ съ Начертательною Геометріею. Институтъ Инженеровъ Путей Сообщенія, Главное Училище Инженеровъ, и Горный Корпусъ ввели сію науку въ ихъ учебныя системы. Полковникъ Базенъ изданіемъ въ свѣтъ Traité élémentaire du Calcul Différentiel облегчилъ преподаваніе сей важной отрасли Математики: одинъ изъ бывшихъ воспитанниковъ Института вскорѣ подаритъ наши Учебныя заведенія переводомъ сего сочиненія. Какъ приятно видѣть, что Институтъ Инженеровъ,

основанный въ благословенное царствованіе ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА, *и особенно покровительствуемый Высокимъ его Учредителемъ, приноситъ столь богатые плоды на полприщѣ классической учености.*

Представляемыя на судъ Публ. Начальныя Основанія Аналитической Геометріи, *есть плодъ моихъ четырехлѣтнихъ трудовъ, изысканій, и наблюденій. Руководствуемый на стезяхъ Анализа сочиненіями Лакроа и Біота, иное я заимствовалъ изъ оныхъ, присособляя къ плану, предначертанному мною для сего сочиненія. Біотъ въ предисловіи къ Аналитической Геометріи, говоритъ о многихъ профессорахъ, подававшихъ ему совѣты: охотно уступаю Біоту въ познаніяхъ, но не уступлю ему въ признательности, которою я долженъ Профессору Чижову; по окончаніи сего сочиненія онъ прочелъ оное, и его отзывъ ободрилъ меня представить трудъ мой Ученому Собранію Императорской Академіи Наукъ. Польза, которую сіе сочиненіе принесетъ моимъ соотечественникамъ будетъ для меня лестнѣйшею наградою.*

НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ

АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ И ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЯ ПОНЯТІЯ.

1) *Аналитическая Геометрія* имѣетъ предметомъ изслѣдованіе свойствъ линій и поверхностей, выраженныхъ Аналитически, и обратно, Аналитическое выраженіе свойствъ линій и поверхностей по даннымъ условіямъ, изображающимъ свойства сихъ линій и поверхностей. Предметъ Аналитической Геометріи.

2) Поелику данныя линіи могутъ быть разсматриваемы или на плоскости, въ случаѣ когда всѣ точки оныхъ находятся въ той же плоскости, или въ пространствѣ когда всѣ точки оныхъ подлежатъ или не подлежатъ сему условію, то мы и раздѣлимъ ученіе объ Аналитической Геометріи на двѣ части, изъ коихъ въ первой займемся изслѣдованіемъ свойствъ линій, принимая оныя въ разсужде- Раздѣленіе оной.

ніе на плоскости, а предметъ второй будетъ изслѣдованіе свойствъ линій и поверхностей, принимая оныя въ разсужденіе, въ пространствѣ; сія послѣдняя часть называется *Геометріею въ пространствѣ* (*).

Способъ разсматриванія линіи вообще.

3) При разсматриваніи линіи принимаютъ въ разсужденіе какую ни есть точку на оной. Естьли условимся опредѣлять извѣстнымъ образомъ положеніе сей точки, тогда между количествами опредѣляющими сіе положеніе будетъ существовать отношеніе, перемѣняющееся для каждой линіи: въ семъ отношеніи количества сіи будутъ измѣняться для каждой точки сей линіи, но отношеніе между оными будетъ непремѣнно. Естьли сіе отношеніе напишемъ Аналитически и придадимъ постоянную величину одному изъ количествъ, опредѣляющихъ положеніе точки, тогда другое количество опредѣленное изъ сего отношенія вмѣстѣ съ приданною первому постоянною величиною, послужитъ намъ къ тому, чтобы опредѣлить положеніе одной изъ точекъ той линіи, которой сіе отношеніе принадлежитъ; повторивъ сіе дѣйствіе получимъ еще точку и т. д.; послѣ чего будемъ имѣть рядъ точекъ, сей линіи принадлежащихъ, а потому опредѣляющихъ ходъ оной.

(*) Здѣсь подъ *пространствомъ* разумѣется часть онаго, заключенная между тремя плоскостями.

4) Для опредѣленія положенія точки на плоскости относятъ оную къ двумъ неподвижнымъ прямымъ, въ сей плоскости подъ извѣстнымъ угломъ протянутымъ; потомъ проведя изъ сей точки параллельную одной изъ нихъ и продолживъ оную до пресѣченія съ другою, имѣютъ два разстоянія опредѣляющія положеніе сей точки; ибо, обратно, отъ вершины сего постояннаго угла по одной изъ неподвижныхъ прямыхъ отложивъ разстояніе равное одному изъ опредѣленныхъ нами предъ симъ, проведемъ чрезъ конецъ онаго прямую, параллельную другой неподвижной прямой; точка сей параллельной удаленная отъ сей послѣдней неподвижной прямой на извѣстное уже разстояніе будетъ искомою точкою. Опредѣленіе положенія точки и линіи на плоскости.

Положимъ, что для большей простоты неподвижныя прямыя A B и A C между собою перпендикулярны. Тогда относя къ симъ прямымъ какую ни есть точку M въ ихъ плоскости взятую, имѣемъ двѣ опредѣленныя положеніемъ и длиною прямыя: A P (= M Q) и P M (= A Q), опредѣляющія помощію постоянно взятаго угла C A B положеніе точки M. Фиг. 1.

Чтобы перейти изъ опредѣленія положенія точки къ опредѣленію положенія линіи вообразимъ, что точка M принадлежитъ какой ни есть линіи M S въ той же плоскости находящейся. Здѣсь количества, по которымъ можетъ быть опредѣлено положе-

ніе точки M будутъ MP и AP, по чему между оными и будетъ существовать отношеніе, собственно принадлежащее линіи MS; поелику сіи количества AP и PM будутъ измѣняться для каждой точки линіи MS, то мы и означимъ оныя чрезъ перемѣнныя x и y. Тогда отношеніе между ими можетъ быть представлено уравненіемъ $\varphi(x, y) = 0$, гдѣ φ означаетъ какое ни есть соединеніе x и y съ постоянными величинами. Естьли въ семъ отношеніи придадимъ x постоянную величину AP′, то оное обратится въ $\varphi(AP', y) = 0$; опредѣлимъ изъ сего уравненія y; сія величина y будучи выражена въ семъ уравненіи въ постоянныхъ будетъ постоянна, и именно равна P′M′, ибо опредѣлена изъ отношенія между x и y, собственно принадлежащаго линіи MS. Имѣя постоянныя величины AP′ и M′P′ мы опредѣляемъ помощію оныхъ положеніе точки M′. Продолжая сіе дѣйствіе, помощію отношенія $\varphi(x, y) = 0$, опредѣлимъ рядъ точекъ принадлежащихъ линіи MS, а по сему и ходъ сей линіи.

Прямыя AP (= MQ) и PM (= AQ) называются *координатами* точки M, въ особенности же AP называется *абсцисою*, а PM *ординатою;* прямыя AB и AC называются *осями координатъ*, въ особенности же AB *осью абсцисъ* и AC *осью ординатъ;* точка A называется *началомъ координатъ*. Въ случаѣ когда разсматриваемъ точку M какъ ка-

кую ни есть точку, и слѣдовательно предполагаемъ всевозможныя ея положенія, прямыя АР и РМ означаются неопредѣленными *x* и *y*; почему ось ординатъ А С называется также *осью y*, а ось абсцисъ А В *осью x*.

5) Отношеніе существующее между ординатами какой ни есть точки находящейся на данной линіи, называется *уравненіемъ* сей линіи (*). И обратно когда имѣемъ уравненіе какой ни есть линіи, тогда самая сія линія называется *Геометрическимъ мѣстомъ* сего уравненія.

Что называется уравненіемъ линіи, и Геометрическимъ мѣстомъ уравненія.

Сія какая ни есть точка предположена находящеюся на линіи, почему отношеніе между координатами сей точки должно выражать свойство сей линіи. Изъ чего и заключимъ, что уравненіе линіи есть Аналитическое выраженіе свойства оной; а по сему, обратно, Геометрическое мѣсто какого ни есть уравненія есть линія, коей свойство выражено симъ уравненіемъ. При томъ замѣтимъ, что опредѣленія, что есть уравненіе и мѣсто онаго относительно къ линіи, могутъ быть приложены и къ поверхности. Сблизивъ сіи разсужденія съ тѣмъ, что мы сказали о предметѣ Аналитической Геометріи (§ 1) усматри-

(*) Такимъ образомъ уравненіе $\varphi(x, y) = 0$, принятое нами въ разсужденіе въ § 4 было уравненіемъ линіи M S.

ваемъ, что, выражаясь иначе, предметъ Аналитической Геометріи состоитъ въ выведеніи уравненія по данному Геометрическому мѣсту онаго, и обратно въ опредѣленіи сего мѣста по данному уравненію онаго; то есть, что *предметъ Аналитической Геометріи есть находить уравненія данныхъ линій и поверхностей, и обратно, опредѣлять линіи и поверхности, представленныя данными уравненіями.*

Знаки координатъ; уравненія осей, начала, и прямыхъ параллельныхъ осямъ.

6) Въ § 4 показано какимъ образомъ опредѣляется положеніе точки на плоскости; а теперь мы займемся разсматриваніемъ обстоятельствъ, кои могутъ встрѣтиться при семъ опредѣленіи.

Фиг. 2.

Для сего положимъ, что требуется опредѣлить относительно къ извѣстной системѣ прямоугольныхъ осей A X и A Y положеніе точки, коей координаты даны уравненіями: $x = a$, $y = b$.

Поелику двѣ прямыя A Y, A X пересѣкаясь между собою составляютъ четыре угла: Y A X, Y A x, y A x, и y A X, то явно, что опредѣляя по данному условію $x = a$, $y = b$ искомую точку получимъ четыре точки: M, M′′, M′, M′′′ опредѣленныя отложеніемъ абсцисъ A P, A P′′ равныхъ a, и ординатъ M P, M′ P, M′′ P′′ и P′′ M′′′ равныхъ b; всѣ сіи точки удовлетворяютъ вопросу. И такъ кажется что уравненія $x = a$, $y = b$ представляютъ намъ не одну точку,

но четыре, что и дѣйствительно имѣетъ мѣсто, когда не принимаемъ въ разсужденіе знаковъ, коими сопровождены количества a и b. Въ случаѣ же, естьли мы примемъ въ разсужденіе сіи знаки, данныя условныя уравненія опредѣлятъ намъ токмо одну точку, что мы теперь и покажемъ.

Положимъ для сего, что вмѣсто прямой A Y отъ которой щитаемъ абсцисы взята другая параллельная оной прямая $A'Y'$ отстоящая отъ прямой A Y на разстояніе $AA' (= m)$, и вообразимъ въ углѣ $Y'A'X$ какую ни есть точку N, назвавъ новыя абсцисы чрезъ x'; тогда будемъ имѣть для точки N, находящейся въ углѣ $Y'A'X$ уравненіе:

$$AQ = AA' + A'Q \text{ или } x = m + x';$$

а для точки M находящейся въ углѣ $Y'A'x$, уравненіе:

$$AP = AA' - A'P \text{ или } x = m - x';$$

изъ чего и видно, что при употребленіи тойже Аналитической формулы: $x = m + x'$ къ опредѣленію положенія точекъ, находящихся въ углахъ: $Y'A'X$ и $Y'A'x$ должно для точекъ находящихся въ семъ послѣднемъ принимать абсцису x' за отрицательную, такъ, что перемѣна положенія точки, переходящей изъ одного изъ сихъ угловъ въ другой должна означаться перемѣною знака при абсцисѣ оной точки, и обратно.

Предположивъ, что вмѣсто прямой AX, отъ которой щитаемъ ординаты, взята для сего другая прямая въ извѣстномъ разстояніи отъ прямой A X параллельно оной проведенная, по подобнымъ предъидущимъ разсужденіямъ заключимъ, что перемѣна знака сопровождающаго ординату, будетъ соотвѣтствовать перемѣнѣ положенія точки, переходящей изъ угла лежащаго надъ осью абсцисъ въ уголъ находящійся подъ оною, и обратно.

И такъ, по условіи принимать въ одномъ изъ четырехъ угловъ, составляемыхъ осями координатъ, на примѣръ въ уголъ Y A X, координаты за положительныя, знаки координатъ въ прочихъ углахъ измѣнятся, по доказанному нами, слѣдующимъ образомъ:

Въ уголъ Y A X; $x = +A$, $y = +A'$;
— — Y A x; $x = -A$, $y = +A'$;
— — y A x; $x = -A$, $y = -A'$;
— — y A X; $x = +A$, $y = -A'$;

гдѣ A и A′ суть какія ни есть постоянныя величины.

Принявъ въ разсужденіе сіи знакоположенія, изъ коихъ первое условное, а прочія слѣдующіе изъ онаго, и приложивъ къ опредѣленію точки, данной уравненіями $x = \pm a$, $y = \pm b$, получимъ:

для $x = +a$, $y = +b$; точку M;
— $x = +a$, $y = -b$; — M′;
— $x = -a$, $y = +b$; — M″;
— $x = -a$, $y = -b$; — M‴;

изъ чего и заключимъ, что уравненія: $x = a$, $y = b$, принимая въ разсужденіе знаки величинъ a и b, опредѣляютъ положеніе одной токмо точки.

Уравненія $x = a$, $y = b$ опредѣляющія положеніе точки на плоскости, называются *уравненіями точки.*

Разстояніе всѣхъ точекъ принадлежащихъ оси x, и означаемое вообще чрезъ y, до оной оси равно нулю, по чему $y = 0$ будетъ уравненіемъ оси абсцисъ x; по подобной причинѣ уравненіе $x = 0$, выражая свойство всѣхъ точекъ принадлежащихъ оси y, будетъ уравненіемъ оси ординатъ y. Уравненія: $x = 0$, $y = 0$, взятыя вмѣстѣ принадлежатъ точкѣ находящейся въ тоже время на обѣихъ осяхъ, а посему будутъ уравненіями точки пресѣченія оныхъ, то есть начала координатъ.

Уравненіе $x = b$ опредѣляетъ всѣ точки, отстоящія отъ оси y на разстояніе b, по чему мѣсто онаго будетъ прямая, параллельная оси ординатъ y.

Уравненіе $y = c$ опредѣляетъ всѣ точки, отстоящія отъ оси x на разстояніе c, почему мѣстомъ сего уравненія будетъ прямая, параллельная оси абсцисъ x.

Общій способъ выводить уравненіе какой ни есть линіи.

7) Мы сказали, что уравненіемъ какой ни есть линіи называется отношеніе, существующее между координатами какой ни есть изъ точекъ сей линіи. При заданіи вопроса вывести уравненіе линіи обыкновенно задаются условія, показывающія отличительныя свойства оной, то есть какой ни есть точки, находящейся на сей линіи. По сему естественнѣйшій способъ при заданіи вопроса о выведеніи уравненія какой ни есть линіи, состоитъ въ предположеніи, что сія линія уже построена, то есть, что имѣемъ какую ни есть точку оной, коей координаты по сему и будутъ означены неопредѣленными x и y. Написавъ аналитически отношеніе между сими координатами x и y, которое бы означало свойство предложенной линіи, мы получимъ искомое уравненіе оной, по которому и ходъ сей линіи совершенно опредѣлится.

Приложеніе къ кругу.

8) Положимъ, напримѣръ, что требуется опредѣлить уравненіе линіи, которой всѣ точки, находящіяся въ тойже плоскости равно отстоятъ отъ данной въ сей же плоскости точки.

Фиг. 3.

Пусть будетъ А данная точка, и a постоянное разстояніе до оной точки всѣхъ точекъ искомой кривой; проведемъ чрезъ данную точку А двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя А Х и А У, которыя и примемъ за оси координатъ x и y; предположимъ также,

что точка M представляетъ намъ какую ни есть точку искомой кривой; означимъ по сему координаты A P и P M оной чрезъ x и y. Для разрѣшенія вопроса должно будетъ написать аналитически, что сія какая ни есть точка M. на искомой кривой взятая, отстоитъ отъ данной точки A на разстояніе a.

Для сего выразимъ въ неопредѣленныхъ координатахъ x и y разстояніе точки M до точки A; оное какъ намъ показываетъ прямоугольный треуг. A P M будетъ равно $\pm\sqrt{y^2+x^2}$; но сіе разстояніе есть общее разстояніе всѣхъ точекъ на искомой линіи находящихся до точки A, которое должно быть по условію вопроса постоянно и именно равно a, почему уравнявъ выраженіе онаго данной величинѣ a получимъ:

$$\pm\sqrt{y^2+x^2}=a, \text{ или } y^2+x^2=a^2,$$

искомое уравненіе предложенной линіи.

Общій способъ опредѣлять видъ линіи изъ даннаго уравненія оной.

9) Положимъ, теперь, что предложено по данному уравненію какой ни есть линіи опредѣлить видъ самой сей линіи, или что все одно, по данному уравненію опредѣлить геометрическое мѣсто онаго. Для показанія какъ поступить въ семъ случаѣ вспомнимъ, что всякая линія образуется различными положеніями точекъ находящихся на оной, и притомъ что сіи положенія точекъ опредѣляются величинами соотвѣтствующихъ онымъ коорди-

матъ. Притомъ представивъ, что данное уравненіе изображено вообще чрезъ $\Phi(x, y) = 0$, гдѣ Φ означаетъ какое ни есть сопряженіе x и y съ данными величинами, легко усмотрѣть можемъ, что придавъ постоянную величину одному изъ сихъ перемѣнныхъ x и y, другое изъ онаго уравненія опредѣлить можемъ. И такъ принявъ въ разсужденіе данное уравненіе, надлежитъ намъ разсмотрѣть какимъ образомъ увеличеніе или уменьшеніе одного изъ сихъ перемѣнныхъ, напримѣръ ординаты y, соотвѣтствуетъ увеличенію или уменьшенію другаго перемѣннаго, то есть абсцисы x, или, имѣя рядъ произвольныхъ послѣдовательныхъ величинъ абсцисы x опредѣлить соотвѣтствующія различнымъ членамъ онаго величины ординаты y. Послѣ чего взявъ попарно соотвѣтствующіе члены въ сихъ двухъ рядахъ, опредѣлимъ для каждой пары одну изъ точекъ искомой линіи, а посему будемъ имѣть относительное взаимное положеніе точекъ искомой кривой, которое и образуетъ оную. Въ слѣдствіе сихъ разсужденій выведемъ изъ даннаго уравненія величину ординаты y въ величинѣ абсцисы x; употребимъ всѣ алгебраическія дѣйствія, могущія служить къ приведенію сего выраженія въ простѣйшій видъ, и потомъ придавая различныя произвольныя величины абсцисѣ x, изслѣдуемъ соотвѣтствующія онымъ величины ординаты y; сіе изслѣдованіе пока-

жетъ намъ всѣ обстоятельства хода искомой линіи.

Чтобы опредѣлить разпространеніе кривой по длинѣ осей координатъ, построимъ точки пресѣченія оной съ сими осями; для сего замѣтимъ, что отношеніе между координатами точки пресѣченія кривой съ осью должно быть тоже какъ и вмѣстѣ взятыя отдѣльныя отношенія координатъ: какой ни есть точки на сей кривой и какой ни есть точки на оси; а посему для опредѣленія координатъ точки пресѣченія искомой кривой, напримѣръ съ осью абсцисъ x, будемъ имѣть уравненія: $\varphi(x, y) = 0$ и $y = 0$; изъ сихъ двухъ уравненій опредѣлимъ величину абсцисы x, которую отложивъ отъ начала координатъ по оси абсцисъ, опредѣлимъ искомую точку. Тоже самое должно разумѣть и объ опредѣленіи точки пресѣченія искомой кривой съ осью ординатъ; въ семъ случаѣ соединяются уравненія: данное $\varphi(x, y) = 0$ и оси ординатъ $x = 0$.

Приложеніе къ кругу.

10) Положимъ, напримѣръ, что требуется опредѣлить геометрическое мѣсто выведеннаго нами предъ симъ уравненія:

$$y^2 + x^2 = a^2.$$

Для узнанія вида кривой, представленной симъ уравненіемъ выведемъ изъ онаго величину ординаты y въ величинѣ абсцисы x; получимъ:

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Разсмотримъ увеличеніе или уменьшеніе ординаты относительно къ увеличенію или уменьшенію абсцисы. Для сего положимъ, что взаимно перпендикулярныя прямыя A X и A Y будутъ осями координатъ x и y; будемъ придавать, начавъ съ наименьшей, различныя величины абсцисъ x, и разсматривать соотвѣтствующія онымъ величины ординаты y. Для сего положимъ $x = 0$, получимъ:

$$y = \pm \sqrt{a^2} = \pm a;$$

откуда видно, что точки B и B взятыя на оси ординатъ въ разстояніяхъ отъ начала координатъ A: A B равномъ $+a$, и A B′ равномъ $-a$, будутъ точками пресѣченія искомой линіи съ осью ординатъ, слѣдовательно разпространеніе кривой по длинѣ сей оси, не принимая въ разсужденіе знаковъ, будетъ равно $2a$.

Положивъ въ данномъ уравненіи $y = 0$, получимъ изъ онаго $x = \pm a$, величину показывающую намъ, что точки C и C′, взятыя на оси абсцисъ въ разстояніяхъ отъ начала координатъ: A C ($= +a$) и A C′ ($= -a$) будутъ точками пресѣченія искомой кривой съ осью абсцисъ, слѣдовательно разпространеніе кривой по длинѣ сей оси, не принимая въ разсужденіе знаковъ, будетъ также равно $2a$.

Придавъ данному уравненію видъ:

$$y = \pm \sqrt{(a+x)(a-x)},$$

легко усмотрѣть можно, что отъ $x\,(=0)$ до $x\,(=\pm a)$ величина ординаты будетъ дѣйствительная, а за симъ предѣломъ, то есть когда $x>\pm a$, (*) оная обращается въ мнимую, ибо въ обоихъ сихъ послѣднихъ случаяхъ одинъ изъ множителей произведенія $(a+x)\,(a-x)$, находящагося подъ кореннымъ знакомъ, обратится въ отрицательный. Изъ чего и заключимъ, что предложенная даннымъ уравненіемъ кривая будетъ заключаться по длинѣ оси абсцисъ между прямыми D D′′, D′ D′′′ проведенными изъ точекъ C′, C ея пресѣченія съ осью абсцисъ параллельно оси ординатъ y; за сими прямыми въ обѣ стороны отъ начала координатъ A, кривая точекъ имѣть не будетъ, ибо величины ординатъ, выведенныя для оныхъ точекъ, суть мнимыя.

Величина абсцисы x, извлеченная изъ даннаго уравненія будетъ имѣть совершенно подобный видъ величинѣ ординаты y потому, что предложенное уравненіе есть симметрическое относительно къ x и y, то есть будемъ имѣть:

$$x=\pm\sqrt{(a+y)\,(a-y)}.$$

(*) Здѣсь, какъ и въ неравенствахъ, кои встрѣтятся въ послѣдствіи, недолжно принимать въ разсужденіе знаковъ; оные поставлены токмо для того, чтобы показать стороны для отложенія абсцисъ, или ординатъ.

Приложивъ къ сему выраженію предложенныя нами предъ симъ разсужденія увидимъ, что искомая кривая будетъ заключаться по длинѣ оси ординатъ между прямыми D D′, D″ D‴ протянутыми изъ точекъ пресѣченія оной съ осью ординатъ, параллельно оси абсцисъ.

Чѣмъ величина x будетъ болѣе, тѣмъ величина y будетъ менѣе; притомъ выраженіе: $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ показываетъ, что для какой ни есть величины x, напримѣръ $+n\,(< a)$, получимъ двѣ равныя, но токмо съ противными знаками величины y, и что взявъ туже величину x отрицательно, что есть $-n\,(< a)$, получимъ для y двѣ величины равныя предъидущимъ. И такъ для каждой величины x имѣемъ четыре величины y равныя между собою, изъ чего и слѣдуетъ, что по построеніи части кривой въ одномъ изъ угловъ координатъ, прочія части совершенно будутъ оной равны.

Сблизивъ всѣ сіи разсужденія, мы получимъ совершенное понятіе о видѣ кривой, представленной даннымъ уравненіемъ, и о всѣхъ обстоятельствахъ ея хода, изъ чего и заключимъ, что предложенная даннымъ уравненіемъ $y^2 + x^2 = a^2$ кривая, есть *кругъ*.

Когда бы потребовалось очертить оную, то должно бы было построить геометрически столько величинъ ординаты y, соотвѣтствующихъ произвольно взятымъ между пре-

дѣлами $x = o$ и $x = +a$ величинамъ абсцисы x, сколько потребно точекъ для очерченія искомой кривой; сіе послѣднее опредѣленіе вида кривой по ея очертанію называется строеніемъ *по точкамъ*. Въ семъ случаѣ, когда данное уравненіе есть $y^2 + x^2 = a^2$, построеніе каждой ординаты а потому и точки, будетъ зависѣть отъ построенія катета прямоугольнаго треугольника, коего ипотенуза есть a, и другой катетъ извѣстенъ. Описывать кругъ помощію нити прикрѣпленной въ центрѣ, другимъ концемъ оной, удаленнымъ отъ центра на радіусъ, и вообще строить кривую помощію какого ни есть снаряда, то есть опредѣляя оную какъ цѣлое а не по точкамъ, называется строеніемъ *по непрерывному движенію*.

Общій способъ опредѣлять координаты точки пресѣченія двухъ кривыхъ, данныхъ ихъ уравненіями.

11) Въ предъидущихъ разсужденіяхъ показано какимъ образомъ опредѣляется пресѣченіе какой ни есть линіи съ осями координатъ; а теперь займемся разрѣшеніемъ вопроса, какъ находить координаты точки пресѣченія двухъ какихъ ни есть линій, коихъ уравненія даны.

Пусть $\varphi(x, y) = 0$, и $f(x, y) = 0$ представляютъ уравненія двухъ какихъ ни есть линій, координаты точки пресѣченія коихъ опредѣлить должно.

По заданію вопроса искомая точка должна быть общею обѣимъ кривымъ; сія точка находится на кривой представленной уравне-

ніемъ $\varphi(x, y) = 0$, почему координаты ея должны имѣть между собою тоже отношеніе какъ и неопредѣленныя координаты x и y сей кривой; притомъ сія точка находится на кривой представленной уравненіемъ $f(x, y) = 0$, по чему координаты оной должны имѣть между собою тоже отношеніе какъ и неопредѣленныя координаты x и y сей кривой. Изъ чего и слѣдуетъ, что для искомой точки пресѣченія, x и y будутъ имѣть туже величину въ обѣихъ уравненіяхъ, и что по сему уравненія $\varphi(x, y) = 0$ и $f(x, y) = 0$ двухъ данныхъ линій, могутъ быть приняты въ разсужденіе какъ условія, данныя для опредѣленія двухъ искомыхъ величинъ x и y, означающихъ координаты точки пресѣченія, что иначе выражается такъ: координаты искомой точки *удовлетворяютъ* обѣимъ уравненіямъ, или, оба сіи уравненія существуютъ въ тоже время для искомой точки. И такъ соединивъ оныя опредѣлимъ x и y, которыя суть искомыя координаты точки пресѣченія двухъ линій, данныхъ ихъ уравненіями: $\varphi(x, y) = 0$ и $f(x, y) = 0$.

Вотъ почему при опредѣленіи координатъ точки пресѣченія круга съ осью абсцисъ, соединяли мы уравненія: $x^2 + y^2 = a^2$, и $y = 0$; первое есть уравненіе круга, второе оси абсцисъ. Тоже самое должно разумѣть и относительно къ точкѣ пресѣченія круга съ осью

ординатъ, для опредѣленія коей соединили мы уравненія: $y^2 + x^2 = a^2$, и $x = 0$.

О ПРЯМОЙ ЛИНІИ И КРУГѢ.

12) Предъ симъ мы показали, что вопросы относящіеся къ аналитической Геометріи могутъ быть двухъ родовъ: относиться или къ опредѣленію уравненій линій, коихъ свойства даны, или, обратно, къ изслѣдованію вида и свойствъ линій, данныхъ ихъ уравненіями. Примемъ въ разсужденіе вопросъ втораго рода, почему и предложимъ себѣ разсмотрѣть какую линію представляетъ наипростѣйшее уравненіе о двухъ перемѣнныхъ.

Общее уравненіе прямой линіи.

13) Самое простѣйшее уравненіе о двухъ перемѣнныхъ есть общее уравненіе первой степени, коего разсмотрѣніемъ мы теперь займемся, и которое имѣетъ видъ:

$$Ay + Bx = C;$$

раздѣливъ всѣ члены сего уравненія на A и положивъ для краткости: $-\frac{B}{A} = a$, и $\frac{C}{A} = b$, будемъ имѣть:

$$y = ax + b.$$

Положивъ въ семъ уравненіи $x = 0$, получимъ: $y = +b$, изъ чего и заключимъ (11), что точка B опредѣленная отложеніемъ части AB ($= +b$), будетъ точкою пресѣченія искомой линіи съ осью ординатъ.

Положивъ $y = o$, получимъ $ax + b = o$,
Фиг. 4. откуда $x = -\frac{b}{a}$; проведя изъ точки B прямую BC такъ, чтобы *tang.* BCA былъ равенъ a, имѣемъ изъ прямоугольнаго треугольника ABC отношеніе:

$$AB : tang.\ C = -AC : 1, \text{ или}$$

$$b : a = - \quad x : 1, \text{ откуда}$$

$x = -\frac{b}{a}$, что и показываетъ намъ, что точка C есть пресѣченіе искомой линіи съ осью абсцисъ.

Изслѣдуемъ теперь отношеніе между послѣдовательными величинами y, смотря по послѣдовательнымъ величинамъ x; уравненіе $y = ax - b$, показываетъ, что предположивъ въ ономъ x и y положительными, то есть при разсматриваніи хода искомой линіи въ уголъ YAX, величина ординаты y состоитъ изъ двухъ частей: изъ измѣняющагося члена ax и постояннаго b, почему мы и можемъ, протянувъ изъ точки B прямую BQ параллельную оси абсцисъ, разсматривать части ординатъ находящіяся въ верьху оной, то есть не принимать въ разсужденіе постояннаго b; назвавъ неопредѣленную ординату отъ прямой BQ чрезъ y', получимъ два уравненія:

$y = y' + b$ данное, и

$y' = ax$, подлежащее теперь нашему изслѣдованію. Сіе послѣднее по раздѣле-

ніи онаго на x, принимаетъ видъ $\frac{y'}{x} = a$, то есть, что отношеніе между всѣми ординатами y' или Mp, M$'p'$, M$''p''$ и проч. и соотвѣтствующими онымъ абсцисами x, или Bp, Bp', Bp'' и т. д. постоянно, что и даетъ намъ рядъ слѣдующихъ равенствъ:

$$a = \frac{Mp}{Bp} = \frac{M'p'}{Bp'} = \frac{M''p''}{Bp''} \text{ и т. д.}$$

а сіе предполагаетъ подобіе треугольниковъ BpM, Bp'M$'$, Bp''M$''$ и т. д. которое не иначе существовать можетъ какъ въ томъ случаѣ, когда точки: M, M$'$, M$''$ и т. д. принадлежащія искомой линіи, составляютъ прямую. И такъ предложенное общее уравненіе первой степени о двухъ неопредѣленныхъ: $y = ax + b$, есть общее уравненіе прямой линіи, пресѣкающей ось ординатъ y отъ начала координатъ въ разстояніи $+b$, и составляющей съ осью абсцисъ x уголъ, коего тангенсъ равенъ a.

Разсмотримъ величину ординаты y въ углѣ Y A x: для сего положивъ, что x отрицательное, получимъ:

$$y = -ax + b,$$

откуда видимъ, что y будетъ имѣть отрицательную величину тогда, когда $-ax > b$, или $x > -\frac{b}{a}$, то есть что прямая пресѣкши ось абсцисъ x въ точкѣ C, коей разстояніе отъ начала въ отрицательную сторону равно $\frac{b}{a}$, дѣйствительно переходитъ внизъ оси абсцисъ.

О числѣ условій, необходимомъ для опредѣленія уравненія прямой линіи вообще.

14) Уравненіе $y = ax + b$, изслѣдованное нами въ предѣидущемъ § 13, есть общее уравненіе первой степени тогда токмо, когда предстоящіе a и b неопредѣлены, почему сіе уравненіе и будетъ тогда принадлежать всѣмъ прямымъ или будетъ общимъ уравненіемъ прямой; по приданіиже какихъ ни есть частныхъ величинъ предстоящимъ a и b, уравненіе $y = ax + b$ будетъ принадлежать въ особенности одной прямой. И такъ для опредѣленія уравненія прямой, должно опредѣлить двѣ неопредѣленныя постоянныя величины, въ общее уравненіе прямой входящія, для чего потребно два условія; изъ чего и слѣдуетъ что для опредѣленія положенія прямой, достаточно двухъ условій.

Уравненіе прямой, проходящей чрезъ начало координатъ.

15) Поелику въ общемъ уравненіи прямой линіи $y = ax + b$ предстоящій b означаетъ разстояніе отъ начала координатъ, въ которомъ прямая пресѣкаетъ ось ординатъ, то явно, что уравненіе $y = ax$, въ которомъ сіе постоянное b равно нулю, или въ которое членъ имѣющій оное предстоящимъ не входитъ, принадлежитъ всѣмъ прямымъ, проходящимъ чрезъ начало координатъ, а потому и будетъ общимъ уравненіемъ прямой, проходящей чрезъ начало координатъ. Сіе уравненіе заключая въ себѣ одно неопредѣленное постоянное a показываетъ, что для опредѣленія уравненія, а по сему и положенія прямой, проходящей чрезъ

начало координатъ, достаточно одного условія.

16) Послѣ сказаннаго нами объ общемъ уравненіи прямой линіи, займемся опредѣленіемъ частныхъ уравненій оной, удовлетворяющихъ даннымъ условіямъ, и кои часто намъ будутъ нужны въ послѣдствіи.

17) Вывести уравненіе прямой, проходящей чрезъ данную точку. Уравненіе прямой, проходящей чрезъ данную точку.

Пусть α и β представляютъ намъ абсцису и ординату данной точки. Общее уравненіе прямой линіи, есть:

$$y = ax + b,$$

гдѣ a и b неопредѣлены; рѣшеніе вопроса состоитъ въ опредѣленіи сихъ предстоящихъ изъ условія онаго.

Поелику точка, коей координаты α и β, находится на искомой прямой, то оныя и удовлетворяютъ (11) ея уравненію, почему и получимъ, написавъ въ ономъ вмѣсто x и y данныя координаты α и β сей точки, уравненіе

$\beta = a\alpha + b$, которое и представляетъ намъ условіе вопроса. Опредѣлимъ изъ онаго одно изъ неопредѣленныхъ постоянныхъ a и b, или, что все равно, изключимъ соединеніемъ условія $\beta = a\alpha + b$ съ уравненіемъ $y = ax + b$, неопредѣленное b. Получимъ, вычтя изъ сего послѣдняго уравненіе условное,

$$y - \beta = a(x - \alpha)$$

уравненіе прямой, проходящей чрезъ данную точку. Неопредѣленный предстоящій a показываетъ, что чрезъ одну и туже точку можно провести безчисленное множество прямыхъ, коихъ уравненія будутъ имѣть видъ выведеннаго нами, и различествовать между собою токмо величиною тангенса a угла, составляемаго оными съ осью абсцисъ.

Уравненіе прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки.

18) Вывести уравненіе прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки.

Пусть α и β, α' и β', представляютъ намъ координаты двухъ данныхъ точекъ. Общее уравненіе прямой линіи есть:

$y = ax + b$, гдѣ a и b неопредѣлены; рѣшеніе вопроса состоитъ въ опредѣленіи a и b изъ условій онаго.

Поелику точка, коей координаты суть α и β, должна находиться на искомой прямой, то оныя и удовлетворяютъ ея уравненію, почему и получимъ, поставивъ въ оное вмѣсто неопредѣленныхъ x и y данныя координаты α и β сей точки,

$\beta = a\alpha + b$, что и будетъ однимъ изъ условій вопроса. Подобное сему разсужденіе приложенное къ второй данной точкѣ, коей координаты суть α' и β', покажетъ намъ, что второе условіе вопроса есть:

$$\beta' = a\alpha' + b.$$

Опредѣляя изъ сихъ двухъ условій предстоящія a и b искомаго уравненія, получимъ послѣдовательно:

$$\beta - \beta' = a(\alpha - \alpha'), \text{ откуда } a = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'};$$

$$\beta\alpha' - \beta'\alpha = b(\alpha' - \alpha), \text{ откуда } b = \frac{\beta'\alpha - \alpha'\beta}{\alpha - \alpha'};$$

поставивъ въ уравненіе $y = ax + b$, вмѣсто a и b сіи величины, получимъ:

$$y = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} x + \frac{\beta'\alpha - \alpha'\beta}{\alpha - \alpha'},$$

уравненіе прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки.

Уравненіе прямой параллельной данной и проходящей чрезъ данную точку.

19) Вывести уравненіе прямой параллельной данной и проходящей чрезъ данную точку.

Пусть $y = a'x + b'$ представляетъ намъ уравненіе данной прямой, гдѣ посему a' и b' даны, а α и β суть координаты данной точки. Общее уравненіе прямой есть $y = ax + b$.

Прямая, коей уравненіе ищется, должна быть параллельна данной, а посему сіи прямыя съ осью абсцисъ составляютъ равные углы; слѣдовательно уравнявъ тангенсы сихъ угловъ, кои представлены въ сихъ уравненіяхъ чрезъ a и a' (13) получимъ условное уравненіе вопроса:

$$a = a'.$$

Точка, коей координаты суть α и β, находится на искомой прямой, слѣдовательно

оныя удовлетворяютъ ея уравненію; посему получимъ второе условное уравненіе вопроса:

$$\beta = a\alpha + b.$$

Изъ сихъ двухъ условныхъ уравненій, опредѣляя предстоящіе a и b, получимъ послѣдовательно:

$a = a'$; и $\beta = a'\alpha + b$, откуда

$b = \beta - a'\alpha$.

Поставивъ въ уравненіе $y = ax + b$, найденыя для a и b величины, получимъ:

$$y = a'x + \beta - a'\alpha \text{ или}$$
$$y - \beta = a'(x - \alpha),$$

уравненіе прямой параллельной данной и проходящей чрезъ данную точку.

Выраженія координатъ точки пресѣченія двухъ данныхъ прямыхъ.

2о) Опредѣлить координаты точки пресѣченія двухъ данныхъ прямыхъ.

Пусть $y = a'x + b'$ и $y = a''x + b''$ представляютъ намъ уравненія двухъ данныхъ прямыхъ, въ которыхъ посему a', b', a'' и b'' даны. Искомая точка пресѣченія должна быть общею обѣимъ прямымъ, а по сему координаты оной должны удовлетворять уравненіямъ обѣихъ прямыхъ. Почему по предположеніи, что x и y имѣютъ въ данныхъ уравненіяхъ тѣже величины (11), а посему, что оныя суть координаты общей точки обѣимъ прямымъ, два условія вопроса будутъ самыя сіи данныя ура-

внешія, изъ которыхъ опредѣляя координаты x и y, получимъ послѣдовательно:

$0 = (a' - a'')x + b' - b''$, откуда $x = \frac{b'' - b'}{a' - a''}$;

$a''y - a'y = a''b' - a'b''$, откуда $y = \frac{a'b'' - a''b'}{a' - a''}$;

гдѣ x и y суть координаты искомой точки пресѣченія двухъ данныхъ прямыхъ.

Изслѣдованіе сихъ выраженій.

Для введенія въ сіи выраженія условія, что двѣ данныя прямыя между собою параллельны, должно положить въ оныхъ $a'' = a'$; послѣ чего получимъ:

$$x = \frac{b'' - b'}{0}, \text{ и } y = \frac{a'b'' - a'b'}{0} = \frac{a'(b'' - b')}{0},$$

величины безконечно великія, показывающія, что точка пресѣченія параллельныхъ прямыхъ удалена отъ начала на безконечно великое разстояніе, или что параллельныя прямыя никогда не пресѣкаются.

Положивъ въ выраженіяхъ, найденныхъ нами для координатъ точки пресѣченія двухъ данныхъ прямыхъ, $a'' = a'$ и $b'' = b'$, получимъ:

$$x = \frac{0}{0}, \text{ и } y = \frac{0}{0},$$

величины неопредѣленныя, то есть что тогда точка пресѣченія неопредѣленна, въ чемъ и увѣримся замѣтивъ, что уравненіе $y = a''x + b''$ перемѣнится тогда въ уравненіе $y = a'x + b'$, слѣдовательно двѣ данныя прямыя одна съ другою совпадаютъ, а посему каждая точка на

направленіи оныхъ взятая будетъ искомою точкою.

Выраженіе части прямой, заключающейся между двумя данными точками. Фиг. 5.

21) Вывести выраженіе части прямой, заключающейся между двумя данными точками.

Пусть α и β, α' и β', представляютъ намъ координаты AP и PM, AP′ и P′M′ двухъ данныхъ точекъ M и M′; для опредѣленія разстоянія MM′ между оными проведемъ изъ точки M прямую MQ параллельную оси абсцисъ AX. Изъ прямоугольнаго треугольника MM′Q получимъ:

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{M'Q}^2, \text{ или}$$

$$\overline{MM'}^2 = (AP' - AP)^2 + (M'P' - MP)^2 \text{ или}$$

$$MM' = \sqrt{(AP' - AP)^2 + (P'M' - PM)^2};$$

откуда, поставя вмѣсто AP, AP′, MP, и M′P′, величины α, α', β, и β', получимъ:

$$MM' = \sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2},$$

выраженіе искомаго разстоянія.

Замѣняя въ семъ выраженіи MM′, α, α', β и β', неопредѣленными z, x, x', y и y', получимъ:

$$z = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

общее выраженіе разстоянія между двумя данными точками на плоскости.

Положивъ $x' = o$, и $y' = o$, получимъ:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

общее выраженіе разстоянія между какой ни есть точки и начала координатъ, ибо тогда точка коей координаты суть x' и y', совпадаетъ съ началомъ координатъ, что и выражается уравненіями: $x' = o$, и $y' = o$.

22) Вывести выраженія косинуса, синуса и тангенса угла, составляемаго двумя данными прямыми.

Выраженія синуса, косинуса, и тангенса угла составляемаго двумя данными прямыми. Фиг. 6.

Пусть $y = a'x + b'$, и $y = a''x + b''$, представляютъ намъ уравненія двухъ данныхъ прямыхъ, гдѣ посему a', b', a'' и b'' даны. Проведемъ, для большей простоты въ изчисленіи, чрезъ начало координатъ А прямыя параллельныя даннымъ, коихъ уравненія посему будутъ:

$$y = a'x, \text{ и } y = a''x;$$

уголъ составленный сими послѣдними прямыми будетъ равенъ углу выраженія тригонометрическихъ линій коего вывести должно. Посему положивъ что прямыя А М и А М′ представлены уравненіями $y = a'x$ и $y = a''x$, займемся опредѣленіемъ угла МАМ′ онымъ составляемаго, который для краткости означимъ чрезъ А; тогда искомыя тригонометрическія линіи будутъ означаться чрезъ *cos.* А, *sin.* А, и *tang.* А.

Взявъ на которой ни есть изъ данныхъ прямыхъ, напримѣръ А М, отъ начала координатъ разстояніе А М ($= 1$), опишемъ онымъ изъ начала координатъ часть круга МОМ′ со-

отвѣтствующую искомому углу A; соединимъ точки пресѣченія M и M′ сей дуги съ найденными прямыми, прямою MM′, и опустимъ изъ точки M на прямую AM′ перпендикуляръ MS; тогда AS будетъ означать косинусъ искомаго угла. Выразивъ хорду MM′ въ величинѣ AS, то есть *cos.* A, получимъ:

$$\overline{MM'}^2 = 2 - 2\ cos.\ A,$$

откуда $cos.\ A = \frac{2 - \overline{MM'}^2}{2} = 1 - \frac{\overline{MM'}^2}{2}$;

и такъ для нахожденія аналитическаго выраженія для *cos.* A, должно вывести выраженіе хорды MM′. Для сего опредѣлимъ координаты конечныхъ точекъ M и M′ оной.

Точка M, коей координаты означимъ напримѣръ чрезъ и , находится какъ на кругѣ MOM′, коего радіусъ равенъ 1 и центръ въ началѣ координатъ, а посему коего уравненіе (10) есть $x^2 + y^2 = 1$, такъ и на прямой AM, коей уравненіе есть $y = a'x$; и такъ соединивъ сіи уравненія опредѣлимъ изъ оныхъ координаты x и y сей точки M; получимъ послѣдовательно:

$$x^2 + a'^2 x^2 = 1,\ \text{откуда}\ x = \frac{1}{\sqrt{1 + a'^2}};$$

$$y = a'x = \frac{a'}{\sqrt{1 + a'^2}}.$$

Подобное сему разсужденіе приложивъ къ опредѣленію координатъ точки M′, которыя означимъ напримѣръ чрезъ x' и y', получимъ для опредѣленія оныхъ два уравненія:

$x'^2 + y'^2 = 1$, и $y' = a'' x'$;

изъ коихъ $x' = \frac{1}{\sqrt{1+a''^2}}$ и $y' = \frac{a''}{\sqrt{1+a''^2}}$.

Хорда MM′ есть разстояніе между сими двумя точками M и M′, а посему выраженіе оной будетъ (21)

$MM' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, въ которое поставивъ величины выведенныя нами для x, y, x' и y', получимъ послѣдовательно:

$$MM' = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1+a'^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+a''^2}}\right)^2 + \left(\frac{a'}{\sqrt{1+a'^2}} - \frac{a''}{\sqrt{1+a''^2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1+a'^2}{1+a'^2} - \frac{2(1+a'a'')}{\sqrt{1+a'^2}.\sqrt{1+a''^2}} + \frac{1+a''^2}{1+a''^2}}$$

$$= \sqrt{2 - \frac{2(1+a'a'')}{\sqrt{1+a'^2}.\sqrt{1+a''^2}}}$$; а посему

$$MM'^2 = 2 - \frac{2(1+a'a'')}{\sqrt{1+a'^2}.\sqrt{1+a''^2}}.$$

Поставя сію величину $\overline{MM'}^2$ въ выраженіе *cos.* A, предъ симъ нами найденное, получимъ послѣдовательно:

$$cos.\ A = 1 - \frac{MM'^2}{2} = 1 - 1 + \frac{1+a'a''}{\sqrt{1+a'^2}.\sqrt{1+a''^2}},$$

или $cos.\ A = \frac{1+a'a''}{\sqrt{1+a'^2}.\sqrt{1+a''^2}}$, выраженіе косинуса угла, составляемаго двумя данными прямыми.

Для опредѣленія выраженія для *sin.* A, замѣтимъ, что $sin.\,A = \sqrt{1 - cos.^2 A}$, почему поставивъ въ сію величину вмѣсто *cos.* A найденное выраженіе, получимъ послѣдовательно:

$$sin.\,A = \sqrt{1 - \frac{(1+a'a'')^2}{(1+a'^2)(1+a''^2)}} = \sqrt{\frac{a'^2 - 2a'a'' + a''^2}{(1+a'^2)(1+a''^2)}},$$

$$\text{или } sin.\,A = \frac{a' - a''}{\sqrt{1+a'^2}.\sqrt{1+a''^2}}.$$

По раздѣленіи сего выраженія на выраженіе найденное для *cos.* A, получимъ:

$$tang.\,A = \frac{a' - a''}{1 + a'a''}.$$

Условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ.

23) Когда двѣ данныя прямыя перпендикулярны между собою, то есть когда имѣемъ *cos.* A = 0, получимъ:

$$1 + a'a'' = 0,$$

условное уравненіе перпендикулярности двухъ прямыхъ; выведя изъ онаго величину одного изъ тангенсовъ угловъ, составляемыхъ перпендикулярными между собою прямыми съ осью абсцисъ, получимъ:

$a'' = -\frac{1}{a'}$, то есть, что тогда тангенсъ угла составляемаго одною изъ прямыхъ съ осью абсцисъ, равенъ котангенсу угла составляемаго другою прямою съ тою же осью, взятому съ противнымъ знакомъ.

24) Вывести уравненіе прямой перпендикулярной къ данной и проходящей чрезъ данную точку.

Уравненіе прямой перпендикулярной къ данной, и проходящей чрезъ данную точку.

Пусть α и β представляютъ намъ координаты данной точки, и $y = a' x + b'$ уравненіе данной прямой, въ которомъ, по сему, a' и b' даны. Общее уравненіе прямой есть $y = ax + b$, гдѣ a и b должно опредѣлить изъ условій вопроса.

Условіе вопроса, по которому точка коей координаты суть α и β, должна находиться на искомой прямой, есть: $\beta = a\alpha + b$.

Условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ, есть: $1 + a a' = 0$.

Изъ сихъ условій опредѣлимъ неизвѣстные предстоящія a и b; получимъ послѣдовательно:

$$a = -\frac{1}{a'};$$

$$\beta = -\frac{1}{a'}\alpha + b, \text{ откуда } b = \frac{a'\beta + \alpha}{a'};$$

поставивъ найденныя величины для a и b въ уравненіе $y = ax + b$, получимъ:

$$y = -\frac{1}{a'}x + \frac{a'\beta + \alpha}{a'}, \text{ или}$$

$$y - \beta = -\frac{1}{a'}(x - \alpha), \text{ уравненіе}$$

прямой перпендикулярной къ данной и проходящей чрезъ данную точку.

Выраженіе длины перпендикуляра опущеннаго изъ данной точки на данную прямую.

25) Вывести выраженіе длины перпендикуляра опущеннаго изъ данной точки на данную прямую.

Пусть α и $\mathfrak{C}$ представляютъ намъ координаты данной точки, а $y = a'x + b'$ уравненіе данной прямой.

Уравненіе прямой проходящей чрезъ данную точку, коей координаты суть α и $\mathfrak{C}$, и перпендикулярной къ данной прямой, представленной уравненіемъ $y = a'x + b'$, будетъ по предъидущему:

$$y - \mathfrak{C} = -\frac{1}{a'}(x - \alpha).$$

Опредѣлимъ координаты точки пресѣченія прямыхъ: данной, и проведенной къ оной перпендикулярно чрезъ данную точку. Для сей точки пресѣченія будутъ существовать въ тоже время уравненія обѣихъ сихъ прямыхъ; и такъ для опредѣленія координатъ x и y оной, получимъ уравненія:

$$y = a'x + b', \text{ и } y - \mathfrak{C} = -\frac{1}{a'}(x - \alpha).$$

По опредѣленіи сихъ координатъ, поставимъ величины оныхъ въ общее выраженіе z разстоянія между двумя точками, коихъ координаты суть α, $\mathfrak{C}$, x и y, которое есть:

$$z = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \mathfrak{C})^2},$$ послѣ чего и получимъ длину искомаго перпендикуляра.

Замѣтимъ, для простоты въ изчисленіи, что въ выраженіе z входятъ токмо разности

$(x - \alpha)$ и $(y - \mathfrak{C})$ между координатами конечныхъ точекъ, почему и будетъ проще, принявъ въ разсужденіе уравненія:

$$y = a' x + b' \text{ и } y - \mathfrak{C} = -\frac{1}{a'}(x - \alpha)$$

опредѣлить изъ оныхъ сіи разности и поставить найденныя для оныхъ выраженія въ выраженіе z, искомой длины перпендикуляра.

И такъ введемъ въ уравненіе $y = a' x + b'$, сіи разности $(x - \alpha)$ и $(y - \mathfrak{C})$; для сего придадимъ оному видъ:

$$y - \mathfrak{C} = a' x - a' \alpha + a' \alpha + b' - \mathfrak{C},$$
$$\text{или } y - \mathfrak{C} = a'(x - \alpha) + a' \alpha + b' - \mathfrak{C}.$$

Послѣ чего будемъ имѣть для опредѣленія разностей $(x - \alpha)$ и $(y - \mathfrak{C})$ два уравненія:

$$y - \mathfrak{C} = a'(x - \alpha) + a' \alpha + b' - \mathfrak{C}, \text{ и}$$
$$y - \mathfrak{C} = -\frac{1}{a'}(x - \alpha);$$

произведя изчисленіе, получимъ послѣдовательно:

$$-\frac{1}{a'}(x - \alpha) = a'(x - \alpha) + a' \alpha + b' - \mathfrak{C}, \text{ или}$$
$$\left(\frac{1 + a'^2}{a'}\right)(x - \alpha) = \mathfrak{C} - a' \alpha - b'; \text{ откуда}$$
$$x - \alpha = \frac{a'(\mathfrak{C} - a' \alpha - b')}{1 + a'^2};$$

а посему $y - \mathfrak{C} = -\frac{\mathfrak{C} - a' \alpha - b'}{1 + a'^2}$.

Поставивъ сіи величины въ выраженіе z, получимъ:

$$z = \sqrt{\frac{a'^2(\mathfrak{b}-a'\alpha-b')^2}{(1+a'^2)^2} + \frac{(\mathfrak{b}'-a'\alpha-b')^2}{(1+a'^2)^2}}$$

$$= \sqrt{(1+a'^2)\frac{(\mathfrak{b}-a'\alpha-b')^2}{(1+a'^2)^2}}\ ;\ \text{или}$$

$$z = \frac{\mathfrak{b}-a'\alpha-b'}{\sqrt{1+a'^2}},$$ выраженіе длины перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на данную прямую.

Естьли прямая, на которую опускается перпендикуляръ проходитъ чрезъ начало координатъ, что означается условіемъ $b' = 0$, тогда, введя сіе условіе въ выраженіе z получимъ:

$$z = \frac{\mathfrak{b}-a'\alpha}{\sqrt{1+a'^2}}.$$

При совмѣщеніи же сей прямой съ осью абсцисъ, уголъ составляемый оною съ сею осью равенъ нулю; а посему, положивъ $a' = 0$ въ выраженіи z, получимъ:

$z = \mathfrak{b}$, ординату точки, изъ которой опущенъ перпендикуляръ.

26) Уравненія и выраженія предъ симъ нами выведенныя достаточны къ разрѣшенію всѣхъ вопросовъ относящихся къ прямой линіи, почему мы теперь и займемся выведеніемъ общаго и частныхъ уравненій круга, простѣйшей изъ кривыхъ линій.

27) Общимъ уравненіемъ круга называется то, въ которомъ начало координатъ находится гдѣ ни есть въ плоскости круга. Общее и частныя уравненія круга.

Положимъ, что А есть какая ни есть точка взятая въ плоскости круга, коего радіусъ напримѣръ равенъ r, А X и А Y оси координатъ; означимъ координаты АР и РО центра О круга, чрезъ p и q. Пусть точка М будетъ какая ни есть точка на кругѣ взятая, посему координаты оной АР′ и Р′М означаться будутъ чрезъ неопредѣленныя x и y. Для всякой точки на кругѣ разстояніе оной отъ центра постоянно; сіе разстояніе МО между двумя точками М и О, коихъ координаты суть x и y, p и q выражается чрезъ $\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}$, почему уравнявъ оное постоянному, то есть радіусу r, получимъ: Фиг. 7.

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2} = r, \text{ или}$$

$$(x-p)^2+(y-q)^2 = r^2, \text{ или}$$

$x^2-2px+p^2+y^2-2qy+q^2=r^2$, общее уравненіе круга, ибо означаетъ отношеніе между координатами x и y какой ни есть точки на кругѣ находящейся.

Изъ сего уравненія весьма легко вывести частныя уравненія круга; положимъ, во первыхъ, что начало координатъ перенесено на окружность; условіе сего перенесенія заключается въ уравненіи $p^2+q^2=r^2$, ибо тогда оси координатъ могутъ быть означены пря-

мыми A′X′ и A′Y′, а посему координаты центра O прямыми A′p и pO, коихъ отношеніе изъ прямоугольнаго треугольника A′Op будетъ A′p^2 + Op^2 = A′O^2 или $p^2 + q^2 = r^2$. Введя сіе условіе въ общее уравненіе круга, получимъ:

$$x^2 - 2px + y^2 - 2qy = 0,$$

частное уравненіе круга, когда начало координатъ находится гдѣ ни есть на кругѣ.

Положимъ теперь, что начало координатъ A перенесено въ точку D, конецъ діаметра; тогда оси координатъ будутъ прямыя DD′ и DQ, а координаты центра O: абсциса OD, а ордината равна нулю; почему условіе сего перенесенія будетъ:

$$p = r, \text{ и } q = 0;$$

введя сіе условіе въ общее уравненіе круга, получимъ:

$$x^2 - 2rx + r^2 + y^2 = r^2, \text{ или}$$

$y^2 + x^2 - 2rx = 0$, уравненіе круга когда начало координатъ въ концѣ діаметра.

Положимъ, наконецъ, что начало координатъ A перенесено въ центръ O круга; условіе сего перенесенія, означающее что въ семъ случаѣ координаты центра O равны нулю, будетъ:

$p = 0$ и $q = 0$; введя сіе условіе въ общее уравненіе круга, получимъ:

$x^2 + y^2 = r^2$, уравненіе круга когда начало координатъ находится въ цен-

трѣ онаго; сіе уравненіе мы вывели уже въ § 8.

28) Общее уравненіе круга заключаетъ въ предстоящихъ онаго три неопредѣленныя величины: p, q и r, изъ чего и слѣдуетъ что вообще, для опредѣленія уравненія круга потребно три условныя уравненія или три условія; выведенныя изъ сихъ трехъ условій величины для p, q и r, изъ коихъ первыя двѣ опредѣлятъ положеніе центра, а послѣднее длину радіуса, по поставленіи ихъ въ общее уравненіе круга, придадутъ оному частный видъ, соотвѣтствующій тому вопросу, по которому даны сіи условія.

О числѣ условій необходимомъ для опредѣленія уравненія круга вообще.

29) Предложимъ, для примѣра, вопросъ вывести уравненіе круга, проходящаго чрезъ три данныя точки.

Уравненіе круга, проходящаго чрезъ три данныя точки.

Пусть α и $\mathfrak{C}$, α' и $\mathfrak{C}'$, α'' и $\mathfrak{C}''$ представляютъ намъ координаты трехъ данныхъ точекъ; общее уравненіе круга есть:

$$y^2 - 2qy + q^2 + x^2 - 2px + p^2 = r^2,$$ гдѣ p, q и r неопредѣлены.

Каждая изъ трехъ данныхъ точекъ должна находиться на искомомъ кругѣ, а посему координаты каждой изъ сихъ трехъ точекъ, должны удовлетворять уравненію круга; почему и получимъ три слѣдующія условныя уравненія вопроса:

1) $\mathfrak{C}^2 - 2q\mathfrak{C} + q^2 + \alpha^2 - 2p\alpha + p^2 = r^2$;

2) $\mathfrak{C}'^2 - 2q\mathfrak{C}' + q^2 + \alpha'^2 - 2p\alpha' + p^2 = r^2$;

3) $\mathfrak{C}''^2 - 2q\mathfrak{C}'' + q^2 + \alpha''^2 - 2p\alpha'' + p^2 = r^2$;

изъ которыхъ опредѣлимъ величины p, q и r. Не занимаясь сею выкладкой довольно сложной, но ни мало не поясняющей понятій нашихъ о кругѣ, замѣтимъ токмо, что по опредѣленіи такимъ образомъ величинъ p, q и r, поставимъ оныя въ общее уравненіе круга, которое по семъ вставленіи обратится уже въ частное, удовлетворяющее вопросу, то есть будетъ уравненіемъ круга, проходящаго чрезъ три данныя точки.

Естьли бы координаты α'' и $\mathfrak{C}''$ третьей изъ данныхъ точекъ, удовлетворяли уравненію:

$$y = \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}'}{\alpha - \alpha'} x + \frac{\mathfrak{C}'\alpha - \mathfrak{C}\alpha'}{\alpha - \alpha'}, \quad \ldots \quad (18)$$

прямой проходящей чрезъ двѣ первыя данныя точки, то сіе означало бы, что сія послѣдняя точка находится на прямой протянутой чрезъ двѣ первыя, то есть что три данныя точки находятся на одной прямой; а посему что невозможно удовлетворить въ семъ случаѣ условіямъ вопроса.

Уравненіе касательной къ кругу, проведенной.

3о) Чтобы показать соединеніе уравненій прямой и круга, изъ котораго слѣдуютъ многія примѣчательныя свойства сего послѣдняго, предложимъ вопросъ вывести уравненіе

касательныхъ къ кругу: проведенной чрезъ данную точку внѣ онаго, и проведенной чрезъ данную точку на оном.

ной чрезъ точку, данную внѣ онаго.

Для сего, для большей простоты въ изчисленіи, возмемъ одно изъ частныхъ уравненій круга, напримѣръ: (27)

$$y^2 + x^2 - 2rx = o,$$

въ которомъ начало координатъ находится въ концѣ діаметра. Положимъ, что точка O есть центръ даннаго круга, коего радіусъ равенъ r, и A данная точка внѣ онаго, чрезъ которую требуется провести касательную. Протянемъ чрезъ данную точку A и центръ O круга прямую AO, пресѣкающую кругъ въ точкахъ B и B′, и примемъ сію прямую за ось абсцисъ; поелику начало координатъ предположено въ концѣ B діаметра, то прямая BO′ чрезъ оную точку перпендикулярно къ оси абсцисъ AO проведенная, будетъ представлять намъ ось ординатъ y.

Чрезъ данную точку A вообразимъ себѣ какую ни есть сѣкущую AE′ и неопредѣленныя координаты BP и EP, BP′ и E′P′ точекъ пресѣченія E и E′ оной съ кругомъ назовемъ чрезъ x' и y', x'' и y''. Фиг. 8.

Уравненіе прямой проходящей чрезъ данную точку есть:

$$y - \mathfrak{C} = a(x - \alpha);$$

для прямой AE′ проходящей чрезъ точку A, коей ордината равна нулю, а данная абсциса

ВА положимъ равна α, сіе уравненіе перемѣнится въ:

$y = a(x - \alpha)$, гдѣ a есть количество неопредѣленное, которое и должно намъ опредѣлить изъ условія вопроса.

Дабы вывести сіе условіе замѣтимъ, что сѣкущая А Е′ будетъ касательною тогда, когда точки ея пресѣченія Е и Е′ съ кругомъ сольются въ одну точку, то есть когда разность между абсцисами x' и x'' оныхъ будетъ равна нулю, или когда имѣемъ условіе $x' - x'' = 0$, почему и опредѣлимъ величины для x' и x'' въ величинахъ α, a и r.

Для сего сыщемъ абсцисы точекъ пресѣченія предположенной прямой съ кругомъ; для чего и положимъ, что въ уравненіяхъ:

$y^2 + x^2 - 2rx = 0$, и $y = a(x - \alpha)$, неопредѣленныя x и y имѣютъ туже величину; сіи координаты будутъ тогда принадлежать точкѣ пресѣченія сихъ двухъ линій. И такъ для опредѣленія абсцисы сей точки исключимъ y изъ сихъ уравненій; получимъ послѣдовательно:

$a^2(x - \alpha)^2 + x^2 - 2rx = 0$, или

$a^2x^2 - 2a^2\alpha x + a^2\alpha^2 + x^2 - 2rx = 0$, или

$(a^2 + 1)x^2 - 2(a^2\alpha + r)x = -a^2\alpha^2$, или

$$x^2 - 2\frac{(a^2\alpha + r)}{a^2 + 1}x = -\frac{a^2\alpha^2}{a^2 + 1};$$

откуда $$x = \frac{a^2\alpha + r}{a^2 + 1} \pm \sqrt{\frac{(a^2\alpha + r)^2}{(a^2 + 1)^2} - \frac{a^2\alpha^2}{a^2 + 1}}.$$

Двойственная величина абсцисы x показываетъ, что прямая пресѣкаетъ кругъ въ двухъ точкахъ; удержавъ означенія чрезъ x' и x'' абсцисъ сихъ двухъ точекъ, получимъ слѣдующія для оныхъ выраженія:

$$x' = \frac{a^2\alpha + r}{a^2+1} + \sqrt{\frac{(a^2\alpha+r)^2}{(a^2+1)^2} - \frac{a^2\alpha^2}{a^2+1}},$$

и $$x'' = \frac{a^2\alpha + r}{a^2+1} - \sqrt{\frac{(a^2\alpha+r)^2}{(a^2+1)^2} - \frac{a^2\alpha^2}{a^2+1}};$$

взявъ разность между сими величинами и уравнявъ оную нулю, получимъ:

$$2\sqrt{\frac{(a^2a+r)^2}{(a^2+1)^2} - \frac{a^2\alpha^2}{a^2+1}} = 0$$

или $$(a^2\alpha + r)^2 - a^2\alpha^2(1+a^2) = 0,$$

условное уравненіе вопроса, въ которомъ a уже означаетъ тангенсъ угла, составляемаго касательною съ осью абсцисъ.

Опредѣлимъ изъ сего уравненія величину a; получимъ послѣдовательно:

$$a^4\alpha^2 + 2a^2\alpha r + r^2 - a^2\alpha^2 - a^4\alpha^2 = 0,$$

или $$2a^2\alpha r + r^2 - a^2\alpha^2 = 0,$$

или $a^2(\alpha^2 - 2\alpha r) = r^2$, откуда

$$a = \pm\frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha r}};$$ поставивъ сію величину въ уравненіе $y = a(x-\alpha)$ получимъ:

$$y = \pm\frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha r}}(x-\alpha),$$

уравненіе касательной къ кругу, проведенной чрезъ точку данную внѣ онаго.

Геометрическое построеніе касательной къ кругу, проведенной чрезъ точку внѣ онаго.

31) Выраженіе $\pm \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha r}}$ полученное нами для тангенса угла, составляемаго касательною къ кругу съ осью абсцисъ, опредѣляетъ намъ уже извѣстное въ начальной Геометріи построеніе сей касательной. Чтобъ показать сіе, опишемъ на прямой AO, соединяющей данную точку съ центромъ круга, кругъ A C O C′; пресѣченія C и C′ сего круга съ даннымъ будутъ точками касанія къ данному кругу двухъ прямыхъ A C и A C′. Проведемъ прямую CO; имѣемъ въ прямоугольномъ треугольникѣ A C O слѣдующія выраженія для сторонъ:

$$A O = \alpha - r, \quad C O = r; \text{ а посему}$$

$$A C = \sqrt{(\alpha - r)^2 - r^2} = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha r};$$

отношеніе $A C : 1 = C O : \text{tang } C A O$, или

$\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha r} : 1 = r : a$, даетъ:

$a = \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha r}}$, слѣдовательно

AC касательна къ кругу въ точкѣ C.

Приложивъ подобное сему доказательство къ треуг: A C′ O найдемъ что для A C′ будетъ $a = -\frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha r}}$, то есть что A C′ въ точкѣ C′ также касательна къ кругу.

Посему уравненіе прямой A C будетъ:

$$y = \frac{r}{\sqrt{a^2 - 2ar}}(x - \alpha),$$ а прямой

$$A C' \ldots y = -\frac{r}{\sqrt{a^2 - 2ar}}(x - \alpha).$$

32) Займемся теперь выведеніемъ уравненія касательной, проведенной къ кругу чрезъ точку данную на ономъ.

Уравненіе касательной къ кругу, проведенной чрезъ точку на ономъ.

Для большей простоты въ изчисленіи, возмемъ частное уравненіе круга $x^2 + y^2 = r^2$, для котораго начало координатъ находится въ центрѣ; положимъ, что координаты точки данной на кругѣ суть α и $\mathfrak{C}$; уравненіе сѣкущей проведенной чрезъ сію точку будетъ:

$$y - \mathfrak{C} = a(x - \alpha),$$ гдѣ a должно быть опредѣлено изъ условія вопроса.

Соединивъ уравненіе круга съ симъ уравненіемъ, по изключеніи изъ оныхъ ординаты y точки пресѣченія сихъ линій, получимъ для абсцисы той же точки выраженіе:

$$x = \frac{a(a\alpha - \mathfrak{C})}{1 + a^2} \pm \sqrt{\frac{a^2(a\alpha - \mathfrak{C})^2}{(1 + a^2)^2} + \frac{r^2 - (a\alpha - \mathfrak{C})^2}{1 + a^2}}.$$

Положивъ, что разность между абсцисами точекъ пресѣченія прямой съ кругомъ, равна нулю, получимъ условное уравненіе касанія:
$r^2 + a^2(a\alpha - \mathfrak{C})^2 - (\mathfrak{C} - a\alpha)^2 + a^2 r^2 - a^2(a\alpha - \mathfrak{C})^2 = 0$;
или, по сокращеніи,

$$r^2 - (\mathfrak{C} - a\alpha)^2 + a^2 r^2 = 0.$$

Поелику же точка коей координаты суть α и β, и изъ которой должно провести касательную, находится на данномъ уравненіемъ $x^2 + y^2 = r^2$ кругѣ, то по причинѣ что координаты оной должны удовлетворять сему уравненію, получимъ:

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2;$$

по поставленіи въ условное уравненіе касанія вмѣсто r^2 сей величины, тангенсъ a до того принадлежавшій касательной, проведенной чрезъ точку внѣ круга, перемѣнится въ тангенсъ угла, составляемаго съ осью абсцисъ касательною, проведенною чрезъ точку, данную на кругѣ. По семъ вставленіи условіе касанія обращается въ условіе вопроса, и мы получаемъ:

$$\alpha^2 + \beta^2 - (\beta - a\alpha)^2 + a^2\alpha^2 + a^2\beta^2 = 0,$$

$$\text{или } \alpha^2 + \beta^2 - \beta^2 + 2a\beta\alpha - a^2\alpha^2 + a^2\alpha^2 + a^2\beta^2 = 0$$

$$\text{или } \alpha^2 + 2a\beta\alpha + a^2\beta^2 = 0,$$

$$\text{или } \alpha + a\beta = 0, \text{ откуда } a = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

По вставленіи сей величины для a въ уравненіе $y - \beta = a(x - \alpha)$, получимъ:

$$y - \beta = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha),$$

уравненіе касательной, проведенной къ кругу чрезъ точку данную на ономъ.

33) Вообразимъ, что чрезъ данную точку касанія проведенъ радіусъ; тангенсъ угла составляемаго онымъ съ осью абсцисъ опредѣлится изъ прямоугольнаго треугольника, коего ипотенуза будетъ самый сей радіусъ, а катеты α и β, координаты точки касанія; причемъ, зная что центръ принятъ нами за начало координатъ, усматриваемъ что уравненіе радіуса должно быть вида $y = ax$, почему и получимъ:

Касательная въ кругѣ перпендикулярна къ радіусу, проведенному чрезъ точку касанія.

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x \text{ уравненіе радіуса,}$$

проходящаго чрезъ точку касанія.

Сравнивъ сіе уравненіе съ уравненіемъ $y - \beta = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha)$ касательной, усматриваемъ, что тангенсы $\frac{\beta}{\alpha}$ и $-\frac{\alpha}{\beta}$ удовлетворяютъ условному уравненію $1 + a' a'' = 0$ взаимной перпендикулярности двухъ прямыхъ, ибо по вставленіи вмѣсто a' и a'' въ сіе уравненіе величинъ $\frac{\beta}{\alpha}$ и $-\frac{\alpha}{\beta}$, получимъ:

$$1 - \frac{\beta\alpha}{\alpha\beta} = 0 \text{ или } 0 = 0.$$

Изъ сего заключимъ, что касательная въ кругѣ перпендикулярна къ радіусу проведенному чрезъ точку касанія.

О РАЗДѢЛЕНІИ КРИВЫХЪ ЛИНІЙ НА ПОРЯДКИ, И ПЕРЕМѢНѢ КООРДИНАТЪ.

Раздѣленіе кривыхъ линій на порядки.

34) Мы показали предъ симъ какимъ образомъ отношеніе между неопредѣленными x и y можетъ представлять линію, и въ случаѣ когда дано оное, какъ опредѣлять положеніе, свойства и видъ линіи, изображенной симъ отношеніемъ. Сей способъ представлять линіи такъ, что различныя отношенія опредѣляютъ линій, имѣющія различное положеніе, свойства и видъ, подалъ мысль Геометрамъ раздѣлить линіи на порядки, смотря по степенямъ ихъ уравненій.

Уравненіе между неопредѣленными x и y первой степени представляетъ, какъ мы видѣли, прямую линію, почему прямая линія и можетъ быть названа *линіею перваго порядка*.

Уравненіе между неопредѣленными x и y второй степени будетъ представлять линіи, называемыя *линіями втораго порядка;* и т. д. Мы видѣли, что уравненіе круга есть уравненіе второй степени, почему кругъ и можетъ быть названъ кривою линіею втораго порядка.

Опредѣлить положеніе, свойства и видъ линіи изъ даннаго уравненія оной, значитъ *изслѣдовать* сію линію.

Къ чему служитъ перемѣна координатъ.

35) При изслѣдованіи какой ни есть линіи изъ ея уравненія, какъ мы уже и упомянули въ § 9, употребляютъ всѣ алгебраическія дѣй-

ствія, могущія привести сіе уравненіе въ простѣйшій видъ; сіи дѣйствія, означенныя геометрически показываютъ всегда такое перемѣщеніе осей координатъ, къ коимъ отнесена изображенная первоначальнымъ уравненіемъ линія, которое способствуетъ къ простѣйшему открытію положенія, свойства и вида линіи представленной симъ уравненіемъ. Для поясненія сего вспомнимъ, что выведеніе изъ общаго уравненія круга, частныхъ уравненій сей кривой (27) имѣющихъ простѣйшій видъ, зависѣло отъ перемѣщенія системы координатъ относительно къ положенію круга; уравненіе $x^2+y^2=a^2$ круга отнесеннаго къ центру имѣетъ самый простѣйшій видъ изъ уравненій онаго, и мы видѣли, что тогда оси координатъ имѣютъ самое выгодное для изслѣдованія сей кривой положеніе, ибо проходятъ чрезъ центръ оной раздѣляя кругъ на четыре равныя части такъ, что оставалось намъ токмо разсмотрѣть точки находящіяся въ одномъ изъ сихъ угловъ координатъ, дабы получить совершенное понятіе о положеніи, свойствахъ и видѣ сей кривой линіи. Поелику сіи алгебраическія дѣйствія, придающія простѣйшій видъ данному уравненію, означаютъ токмо перемѣщеніе системы координатъ, то явно, что выведенное изъ начальнаго помощію оныхъ уравненіе будетъ принадлежать той же линіи, какъ и уравненіе начальное.

Общій способъ переходить изъ уравненія какой ни есть линіи, къ другому уравненію оной.

36) Чтобъ перейти отъ уравненія какой ни есть линіи къ другому уравненію оной, берутъ въ разсужденіе какую ни есть точку предположенную на линіи представленной уравненіемъ начальнымъ, которое пусть будетъ $\varphi(x, y) = 0$; относятъ сію точку къ системѣ начальныхъ координатъ, и къ системѣ координатъ, къ которой перейти предполагаютъ. Положимъ, что координаты сей послѣдней системы означены чрезъ x' и y'; выводятъ выраженія координатъ первоначальныхъ x и y, въ величинѣ новыхъ координатъ x' и y'; по вставленіи сихъ выраженій въ уравненіе $\varphi(x, y) = 0$, положимъ что оное приметъ видъ $f(x', y') = 0$; сіе послѣднее уравненіе будетъ принадлежать той же линіи, съ тою только разностію, что въ семъ уравненіи оная отнесена къ новой системѣ координатъ x' и y'.

Общія формулы для перемѣны координатъ.

37) Чтобы вывести общія формулы, служащія для перемѣны координатъ положимъ, что должно перейти изъ системы координатъ косоугольныхъ къ системѣ координатъ также косоугольныхъ.

Фиг. 9.

Пусть AY и AX представляютъ намъ оси y и x, координатъ начальныхъ; $A'Y''$ и $A'X''$ оси u и t координатъ новыхъ; возмемъ гдѣ ни есть въ углѣ $Y''A'X''$ точку M, которую и отнесемъ прямыми AP и MP къ системѣ координатъ начальныхъ, а прямыми $A'P''$ и $P''M$ къ системѣ координатъ новыхъ. Поели-

ку положеніе новой системы должно быть совершенно опредѣлено относительно къ системѣ первоначальной, то координаты AC и CA′ начала A′ новой системы назовемъ постоянными α и β; уголъ Y A X ($=$ Y′ A′ X′) составленный между собою начальными координатами x и y означимъ чрезъ ω; уголъ X″A′ X′ составленный новою осью A′ X″ абсцисъ t съ первоначальною осью A X абсцисъ x, или съ прямою A′ X′ параллельною оной, означимъ чрезъ φ; уголъ Y″ A′ Y′ составленный новою осью A′Y″ ординатъ u съ первоначальною осью AY ординатъ y, или съ параллельною оной прямою A′Y′, означимъ чрезъ ψ. Величины α, β, ω, φ, и ψ, будутъ даны.

Займемся теперь выраженіемъ координатъ: x($=$AP) и y($=$PM), въ величинѣ координатъ: t($=$A′P″), u($=$P″M), и данныхъ количествъ: α, β, ω, φ и ψ; для сего проведемъ прямую P″Q параллельно оси A X, и прямую P″R параллельно оси A Y; получимъ:

$$AP = AC + CP = AC + A'P' = AC + A'R + P''Q;$$
$$\text{и } PM = PP' + P'M = A'C + RP'' + QM.$$

Треугольникъ A P″R, въ которомъ уголъ P″A′R $= \varphi$, уг. A′RP″ $= \omega$, уг. A′P″R $= \omega - \varphi$, и A′P″ $= t$, и треуг. P″MQ, въ которомъ уг. MP″Q $= \omega - \psi$, уг. P″QM $= \omega$, уг. P″MQ $= \psi$, и P″M $= u$, опредѣлятъ намъ прямыя A′R, RP и P″Q, QM. Изъ треугольника A′P″R получимъ:

$\frac{A'R}{A'P''} = \frac{sin.(\omega-\Phi)}{sin.\omega}$, откуда $A'R = \frac{sin.(\omega-\Phi)}{sin.\omega}.A'P'' = \frac{sin.(\omega-\Phi)}{sin.\omega}.t$,

и $\frac{P''R}{A'P''} = \frac{sin.\Phi}{sin.\omega}$, откуда $P''R = \frac{sin.\Phi}{sin.\omega}.A'P'' = \frac{sin.\Phi}{sin.\omega}.t$.

Изъ треугольника $P''MQ$ получимъ:

$\frac{P''Q}{P''M} = \frac{sin.\psi}{sin.\omega}$, откуда $P''Q = \frac{sin.\psi}{sin.\omega}.P''M = \frac{sin.\psi}{sin.\omega}u$;

и $\frac{MQ}{P''M} = \frac{sin.(\omega-\psi)}{sin.\omega}$, откуда $MQ = \frac{sin(\omega-\psi)}{sin.u}.P''M = \frac{sin.(\omega-\psi)}{sin.\omega}.u$.

Замѣнивъ въ выраженіяхъ $AP(=x)$ и $PM(=y)$ прямыя AC и $A'C$ величинами α и $\mathfrak{C}$, а прямыя $A'R$, $P''Q$, $P''R$, и QM найденными для оныхъ предъ симъ выраженіями, получимъ:

$$x = \alpha + \frac{sin.(\omega-\Phi)}{sin.\omega}.t + \frac{sin.\psi}{sin.\omega}.u;$$

$$y = \mathfrak{C} + \frac{sin.\Phi}{sin.\omega}.t + \frac{sin.(\omega-\psi)}{sin.\omega}.u.$$

Формулы для перемѣны начала координатъ и направленія осей, при переходѣ изъ системы косоугольной въ косоугольную же систему. Поелику сей случай есть самый общій при перемѣнѣ координатъ, то сіи формулы и могутъ быть названы *общими формулами перемѣны координатъ.*

Поелику въ общія формулы для перемѣны координатъ, входятъ новыя координаты въ первой степени, то изъ сего слѣдуетъ что по вставленіи оныхъ въ первоначальное уравненіе, получимъ тѣ же степени новыхъ координатъ какія имѣли координаты первона-

чальныя, то есть что перемѣна координатъ не перемѣняетъ степени первоначальнаго уравненія.

Частныя формулы для перемѣны координатъ косоугольныхъ.

38) Положимъ что требуется перемѣнить токмо направленія осей, не перемѣняя начала координатъ; тогда координаты начала A′ новыхъ осей, отнесеннаго къ осямъ первоначальнымъ, будутъ равны нулю, ибо точка A′ совпадаетъ съ точкою A; почему и получимъ условіе: $\alpha = 0$, и $\mathfrak{C} = 0$. Введя оное въ общія формулы имѣемъ въ семъ случаѣ:

$$x = \frac{sin.(w - \Phi)}{sin.w}.t + \frac{sin.\psi}{sin.w}.u;$$
$$y = \frac{sin.\Phi}{sin.w}.t + \frac{sin.(w - \psi)}{sin.w}.u.$$

Положимъ что требуется перемѣнить направленіе одной оси y и начало координатъ: въ семъ случаѣ ось t совпадаетъ съ параллельною оси x, а посему будетъ $\varphi = 0$; слѣдовательно $sin.\varphi = 0$, $cos.\varphi = 1$, и мы получимъ:

$$x = t + \frac{sin.\psi}{sin.w}.u + \alpha;$$
$$y = \frac{sin.(w - \psi)}{sin.w}.u + \mathfrak{C}.$$

При перемѣнѣ направленія одной оси x и начала координатъ, ось u совпадаетъ съ параллельною оси y, а по сему получимъ $\psi = 0$, слѣдовательно $sin.\psi = 0$, $cos.\psi = 1$, и мы будемъ имѣть:

$$x = \frac{sin.(w-\Phi)}{sin.\,w}.\,t + \alpha;$$

$$y = \frac{sin.\Phi}{sin\,w}.\,t + u + \mathfrak{C}.$$

При перемѣнѣ одного токмо начала координатъ ось t совпадаетъ съ параллельною оси x, а ось u съ параллельною оси y, почему и получимъ въ тоже время: $\varphi = 0$, и $\psi = 0$; а посему $sin.\,\varphi = 0$, $cos.\,\varphi = 1$, и $sin.\,\psi = 0$, $cos.\,\psi = 1$, и мы будемъ имѣть:

$$x = t + \alpha,\ y = u + \mathfrak{C}.$$

Частныя формулы для перемѣны координатъ косоугольныхъ въ прямоугольныя, и обратно.

39) Положимъ что требуется перейти изъ системы координатъ косоугольныхъ въ систему координатъ прямоугольныхъ; въ семъ случаѣ ось абсцисъ t и ось новыхъ ординатъ u будутъ составлять между собою прямой уголъ, а посему получимъ: $w - \varphi - \psi = 90^\circ$, или $w - \psi = 90^\circ + \varphi$, и $\psi = (w - \varphi) - 90^\circ$, слѣдовательно $sin.\,(w - \psi) = cos.\,\varphi$, а $sin.\,\psi = -cos.\,(w - \varphi)$, и мы будемъ имѣть:

$$x = \frac{sin.(w-\Phi)}{sin\,w}.\,t - \frac{cos.(w-\Phi)}{sin\,w}.\,u + \alpha,$$

$$y = \frac{sin.\Phi}{sin.w}.\,t + \frac{cos.\Phi}{sin.w}\,u + \mathfrak{C}.$$

При перемѣнѣ координатъ прямоугольныхъ въ координаты косоугольныя, будемъ имѣть: $w = 90^\circ$, слѣдовательно $\sin(w-\varphi) = \sin(90^\circ - \varphi) = cos.\,\varphi$, $sin.\,(w-\psi) = sin.\,(90^\circ - \psi) = cos.\,\psi$, и $sin.\,w = 1$; а посему получимъ:

$$x = t\cos.\varphi + u\sin.\psi + \alpha;$$
$$y = t\sin.\varphi + u\cos.\psi + \mathfrak{C}. \text{ (*)}$$

40) Положимъ, наконецъ, что предложено перейти изъ системы координатъ прямоугольныхъ въ прямоугольную же систему. Тогда получимъ: $w = 90^\circ$ и $w - \psi - \varphi = 90^\circ$, слѣд. $\sin.w = 1$, $-\psi - \varphi = 0$ слѣд. $\psi = -\varphi$ то есть $\sin.\psi = -\sin.\varphi$; поставя сіи условія въ общія формулы, (37) получимъ:

Перемѣна координатъ прямоугольныхъ въ прямоугольныя же координаты.

$$x = t\cos.\varphi - u\sin.\varphi + \alpha,$$
$$y = t\sin.\varphi + u\cos.\varphi + \mathfrak{C}.$$

Перемѣняя же одно направленіе осей, будемъ имѣть: $\alpha = 0$ и $\mathfrak{C} = 0$, почему и получимъ:

$$x = t\cos.\varphi - u\sin.\varphi;$$
$$y = t\sin.\varphi + u\cos.\varphi.$$

(*) Естли бы въ семъ случаѣ должно было перемѣнить направленіе одной оси y не перемѣняя притомъ и начала, тогда бы получили условія: $\varphi = 0$, $\alpha = 0$, $\mathfrak{C} = 0$, слѣдовательно $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, а посему имѣли бы формулы;

$$x = t + u\sin\psi;\ y = u\cos\psi.$$

Поставивъ сіи формулы въ общее уравненіе $y = ax + b$ прямой линіи, имѣемъ:

$$u(\cos.\psi - a\sin.\psi) = at + b, \text{ или}$$
$$u = \frac{a}{\cos.\psi - a\sin.\psi}.t + \frac{b}{\cos.\psi - a\sin.\psi}.$$

По означеніи въ семъ послѣднемъ уравненіи предстоящихъ t и t° чрезъ a' и b' получимъ: $u = a't + b'$, уравненіе прямой линіи между координатами косоугольными, сохранившее, какъ мы видимъ, видъ уравненія прямой линіи между координатами прямоугольными.

Сіи выраженія могутъ быть выведены непосредственно отъ общихъ формулъ, отнеся какую ни есть точку M къ двумъ системамъ прямоугольныхъ осей: A X, A Y и A X′, A Y′, предположивъ притомъ для простоты, что начало координатъ есть общее. Означимъ координаты A P, P M чрезъ x и y, а координаты A P, P M новой системы чрезъ t и u; поелику положеніе новой системы относительно къ первоначальной совершенно опредѣлено, то мы и означимъ чрезъ ϕ уг. X A X составляемый осями абсцисъ обѣихъ системъ.

Фиг. 10.

Проведемъ прямую P′S параллельно оси x, и прямую P Q параллельно оси y; замѣтивъ что въ треуг. MSP имѣемъ уголъ SMP′ $= \phi$, получимъ:

$$A P = A Q - P' S, \quad P M = P' Q + M S,$$

и изъ треуг. A P′Q отношенія:

$$\frac{A Q}{A P'} = \cos.\phi, \text{ и } \frac{P' Q}{A P'} = \sin.\phi, \text{ откуда:}$$

$AQ = AP' \cos.\phi = t\cos.\phi$, и $P'Q = AP' \sin.\phi = t\sin.\phi$. Подобнымъ образомъ изъ треуг. MSP′ получимъ: $P'S = u\sin.\phi$, и $MS = u\cos.\phi$; поставя найденныя величины для прямыхъ A Q, P′Q, P′S и M S въ выраженія: A P ($= x$) и P M ($= y$) будемъ имѣть:

$$x = t\cos.\phi - u\sin.\phi; \quad y = t\sin.\phi + u\cos.\phi.$$

Въ случаѣ когда ось абсцисъ A X′ новыхъ координатъ проходитъ внизу оси абсцисъ A X координатъ первоначальныхъ, уголъ ϕ будетъ находиться внизу оси абсцисъ A X, почему

въ семъ случаѣ перемѣняя $sin.\varphi$ на $-sin.\varphi$, и обратно, получимъ формулы:

$$x = t\,cos.\varphi + u\,sin.\varphi, \text{ и } y = u\,cos.\varphi - t\,sin.\varphi.$$

ОБЪ ЭЛЛИПСИСѢ.

Уравненіе Эллипсиса, отнесеннаго къ центру и осямъ.

41) *Эллипсисомъ* называется кривая линія, въ которой сумма разстояній отъ двухъ неподвижныхъ точекъ до всякой ея точки, постоянна. И такъ для выведенія уравненія эллипсиса предложимъ вопросъ, вывести уравненіе кривой, имѣющей сіе свойство.

Фиг. 11.

Для сего пусть F и F′ представляютъ намъ данныя неподвижныя точки; разстояніе F F′ между оными означимъ чрезъ $2c$; положимъ, что данная постоянная сумма разстояній отъ точекъ F и F′ до какой ни есть точки M на искомой кривой предполагаемой, равна $2a$. Раздѣлимъ прямую F F′ пополамъ въ точкѣ O; будемъ имѣть $FO = F'O = c$; проведемъ прямую O Y перпендикулярно къ F F′, и примемъ сію прямую FF′ и прямую OY за ось абсцисъ x и ось ординатъ y, и неопредѣленныя координаты O P и P M какой ни есть точки M, предположенной на искомой кривой, означимъ чрезъ x и y.

Для разрѣшенія вопроса найдемъ отношеніе между x и y выражающее свойство кривой, на которой принадлежащая симъ координатамъ точка M находится. Проведемъ прямыя FM и

$F'M$, означивъ оныя чрезъ z и z'; свойство кривой будетъ выражено уравненіемъ $z+z'=2a$. Въ треугольникахъ FPM и $F'PM$ будемъ имѣть: $FP=c-x$, и $F'P=c+x$; изъ оныхъ получимъ: $z=\sqrt{y^2+(c-x)^2}=\sqrt{y^2+c^2-2cx+x^2}$; и $z'=2a-z=\sqrt{y^2+(c+x)^2}=\sqrt{y^2+c^2+2cx+x^2}$; или $z^2=y^2+c^2-2cx+x^2$; и $4a^2-4az+z^2=y^2+c^2+2cx+x^2$; вычтя изъ перваго уравненія второе, будемъ имѣть: $4az-4a^2=-4cx$, или $az-a^2=-cx$, откуда $z=\frac{a^2-cx}{a}$. Поставивъ величину z въ уравненіе $z^2=y^2+c^2-2cx+x^2$, получимъ: $c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2y^2+a^2c^2-2a^2cx+a^2x^2$, или $a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2)$, уравненіе искомой кривой, то есть эллипсиса; поелику въ треугольникѣ MFF' имѣемъ $FM+F'M>FF'$, то и будетъ $2a$ больше $2c$, или $a>c$, почему a^2-c^2 будетъ всегда положительное, и такъ положимъ $a^2-c^2=b^2$; вставивъ въ уравненіе, будемъ имѣть: $a^2x^2+b^2x^2=a^2b^2$.

Изслѣдованіе Эллипсиса.

42) Изслѣдуемъ теперь (9) свойства кривой, которой уравненіе предъ симъ нами выведено, для сего извлечемъ изъ онаго величину ординаты y въ величинѣ абсцисы x; получимъ $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Положивъ $x=0$, получимъ: $y=\pm b$, откуда видно, что точки B и B', взятыя на оси y отъ начала координатъ O въ разстояніяхъ: $OB(=+b)$ и $OB'(=-b)$ будутъ точками пресѣченія искомой линіи съ осью

ординатъ, слѣдовательно разпространеніе кривой по длинѣ оси ординатъ будетъ, не принимая въ разсужденіе знаковъ, равно $2b$.

Положивъ въ данномъ уравненіи $y = 0$, получимъ изъ онаго $x = \pm a$, величину показывающую намъ, что точки A и A′, взятыя на оси абсцисъ отъ начала координатъ въ разстояніяхъ: A O $(= +a)$ и A′ O $(= -a)$ будутъ точками пресѣченія искомой кривой съ осью абсцисъ, слѣдовательно разпространеніе кривой по длинѣ оси абсцисъ будетъ, не принимая въ разсужденіе знаковъ, равно $2a$.

Придавъ данному уравненію видъ: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(a+x)(a-x)}$, легко усмотрѣть можно, что отъ $x (= 0)$ до $x (= \pm a)$ величина ординаты y будетъ дѣйствительная, а за симъ предѣломъ то есть, когда $x > \pm a$, оная обращается въ мнимую, ибо въ обоихъ сихъ послѣднихъ случаяхъ одинъ изъ множителей произведенія $(a+x)(a-x)$ находящагося подъ кореннымъ знакомъ, обратится въ отрицательный, изъ чего и заключимъ, что предложенная даннымъ уравненіемъ кривая будетъ заключаться по длинѣ оси абсцисъ между прямыми DD′, D″D‴ проведенными изъ точекъ ея пресѣченія A, A′ съ сею осью параллельно оси ординатъ; за сими прямыми въ обѣ стороны отъ начала O координатъ, кривая не будетъ имѣть точекъ, ибо мы показали, что величины ординатъ сихъ

точекъ суть мнимыя. Величина абсцисы x извлеченная изъ даннаго уравненія будетъ имѣть совершенно подобной видъ величинѣ ординаты y, потому что предложенное уравненіе есть симетрическое относительно къ x и y, то есть получимъ:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{(b+y)(b-y)}.$$

Приложивъ къ сему выраженію предложенное нами разсужденіе усматриваемъ, что искомая кривая будетъ заключаться по длинѣ оси ординатъ между прямыми DD″, D′D‴ протянутыми изъ точекъ пресѣченія B, B′ оной съ осью ординатъ, параллельно оси абсцисъ.

Чѣмъ величина x будетъ болѣе, тѣмъ величина y будетъ менѣе; притомъ уравненіе $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ показываетъ что для какой ни есть величины x, напримѣръ $+n\ (< a)$ получимъ двѣ равныя величины y, но токмо съ противными знаками, и что взявъ туже величину x отрицательно, то есть $-n\ (< a)$ имѣемъ для y двѣ величины совершенно равныя предъидущимъ, изъ чего и заключимъ, что по построеніи части кривой въ одномъ изъ угловъ координатъ, прочія части совершенно будутъ оной равны.

Сблизивъ всѣ сіи разсужденія усматриваемъ что эллипсисъ есть кривая сомкнутая, симетрически разположенная относительно къ

осямъ координатъ, къ коимъ отнесенное ея уравненіе мы разсмотрѣли. Прямая $AA'(=2a)$, называется *большею осью*, а прямая $BB'(=2b)$ *малою осью* Эллипсиса; точка O *центромъ*, точки F и F′ *фокусами*; разстояніе фокусовъ F и F′ до центра O, означенное чрезъ $c(=\sqrt{a^2-b^2})$ называется *Эксцентрецитетомъ*; прямыя FM и F′M *радіусами векторами*. Замѣтимъ, что уравненіе $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, называется уравненіемъ Эллипсиса, отнесеннаго къ его центру и осямъ.

Фокусы F и F′ весьма легко могутъ быть построены по даннымъ положеніемъ и длиною осямъ; для сего изъ конца малой оси описываютъ радіусомъ равнымъ большей полуоси a дугу FF′; пресѣченія сей дуги съ большею осью опредѣляютъ намъ искомыя точки, ибо по проведеніи прямыхъ BF и BF′ въ треугольникахъ FBO и F′BO получимъ: $FO=\sqrt{a^2-b^2}=c$, и $F'O=-\sqrt{a^2-b^2}=-c$.

Свойство центра въ Эллипсисѣ; опредѣленіе что есть діаметръ.

43) Центръ O въ Эллипсисѣ имѣетъ весьма достопримѣчательное свойство, состоящее въ томъ, что всякая прямая чрезъ него до точекъ ея пресѣченія съ эллипсисомъ протянутая, дѣлится въ сей точкѣ на двѣ равныя части. Чтобы доказать сіе, возмемъ какую ни есть величину абсцисы x, напримѣръ: OP, соотвѣтствующая оной величина ординаты y будетъ PM; отложимъ абсцису OP въ

отрицательную сторону и опредѣлимъ для сей послѣдней точку M'', принадлежащую отрицательной ординатѣ $P'M''$ ($= PM$). Точки M, O и M'', будутъ находиться на одной прямой, и притомъ часть сей прямой MO будетъ равна $M''O$: замѣтимъ, что треугольникъ MOP равенъ треугольнику $M'OP$, ибо OP и OP' равны по отложенію, MP и $M''P'$ по свойству кривой, и притомъ углы MPO и $M'P'O$ суть прямые, а посему во первыхъ: уг. $M''OP' =$ уг. MOP, слѣдственно линія MOM'' есть линія прямая, и во вторыхъ: $M''O = MO$, то есть сія прямая MM' раздѣлена въ точкѣ O пополамъ.

Всякая прямая проведенная чрезъ центръ Эллипсиса, называется *діаметромъ* онаго.

Построенія Эллипсиса: по точкамъ и по непрерывному движенію.

44) Выведенныя нами свойства Эллипсиса подаютъ намъ способы строить оный по точкамъ:

а) Величина ординаты y извлеченная изъ уравненія Эллипсиса есть:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$$

придадимъ какую ни есть величину ($< a$) абсцисѣ x, тогда соотвѣтствующая оной величина y опредѣлится изъ отношенія:

$a : b = \sqrt{a^2 - x^2} : y$, въ которомъ a и b даны, а $\sqrt{a^2 - x^2}$ есть катетъ прямоугольнаго треугольника, коего ипотенуза рав-

на a, а другой катетъ есть величина ($< a$) приданная абсцисѣ x. Отложивъ построенную величину y по перпендикуляру возставленному къ большей оси изъ конца абсцисы $x (< a)$ получимъ одну изъ точекъ кривой: при томъ сіи же величины x и y опредѣляютъ еще три точки Эллипсиса; послѣ сего повторимъ сіе строеніе столько разъ, сколько нужно точекъ для очерченія Эллипсиса.

b) На большей оси A A′ ($= 2a$) описываютъ полукругъ AB′A′; изъ центра O радіусомъ равнымъ малой полуоси b описываютъ полукругъ CBC′; проводятъ какъ ни есть прямую O S′, пресѣкающую въ точкахъ S и S′ два описанныя полукруга. Чрезъ точку пресѣченія S′ сей прямой съ большимъ полукругомъ, опускаютъ на большую ось A A′ перпендикуляръ S′ P, и чрезъ точку S проводятъ прямую S Q параллельно A A′: точка Q будетъ принадлежать Эллипсису, коего оси взяты нами при изъясненномъ строеніи. Должно доказать, что отношеніе между x и y, которыя теперь представлены чрезъ OP и QP, есть уравненіе Эллипсиса: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Фиг. 12.

Для сего замѣтимъ, что треуг. O S′ P $\sim$ треуг. S S′ Q, почему и получимъ:

O S′ : O S = S′ P : P Q, или $a : b = \pm \sqrt{S'O^2 - OP^2} : y$, или $a : b = \pm \sqrt{a^2 - x^2} : y$, откуда $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.

Отложивъ PQ' ($= PQ$) по продолженію прямой PQ внизъ оси абсцисъ AA', также взявъ $OP' = OP$, и $P'Q'' = P'Q''' = PQ$, опредѣлимъ еще три точки для Эллипсиса. Сіе строеніе повторяютъ столько разъ, сколько нужно будетъ для полученія большаго числа точекъ кривой линіи принадлежащихъ.

Фиг. 11. c) Мы знаемъ, что въ Эллипсисѣ $z + z' = 2a$: по приданіи величины одному изъ радіусовъ векторовъ z и z', величина другаго опредѣлится изъ сего уравненія; и такъ какимъ нибудь разстояніемъ $z < 2a$ опишемъ дугу изъ точки F; изъ точки F' опишемъ дугу радіусомъ равнымъ $2a - z$, величинѣ соотвѣтствующей взятой нами для z: точка пресѣченія M сихъ двухъ дугъ будетъ принадлежать Эллипсису, ибо получимъ:

$$FM + F'M = z + 2a - z = 2a.$$

Другая точка пресѣченія M' оныхъ дугъ принадлежитъ также кривой и должна находиться на продолженіи ординаты PM, точки M. Повторяютъ сіе строеніе столько разъ, сколько нужно будетъ.

Описываніе Эллипсиса непрерывнымъ движеніемъ, употребляемое тогда, когда Эллипсисъ великъ и слѣдовательно когда построеніе онаго по точкамъ неудобно, основывается на свойствѣ сей кривой выраженномъ уравненіемъ $z + z' = 2a$.

Въ фокусахъ F и F′ прикрѣпляется ея концами нить, длиною равная большой оси ($=2a$); потомъ напягивается оная колышкомъ, который можетъ скользить по сей нити; каждый разъ, когда нить будетъ натянута концемъ колышка опредѣлитъ точку для Эллипсиса и слѣдственно скользя по сей нити съ симъ условіемъ, конецъ колышка опишетъ часть Эллипсиса S″S′S, ибо сумма разстояній ($FS''+F'S''$), ($FS'+S'F'$), ($FS+SF'$) и пр. д. всегда будетъ равна длинѣ нити, а посему большой оси ($=2a$).

О дополнительныхъ хордахъ.

45) *Дополнительными хордами* въ Эллипсисѣ, называются всякія двѣ прямыя, проходящія чрезъ концы оси, и пресѣкающіяся на Эллипсисѣ. Проходящія чрезъ концы большей оси, какъ AO′ и A′O′ можно назвать дополнительными хордами большей оси, а упирающіяся въ концы меньшей оси, какъ B O″, B′ O″, дополнительными хордами малой оси. Предложимъ вопросъ найти выраженіе для произведенія изъ тангенсовъ угловъ, составляемыхъ дополнительными хордами большей оси съ оною осью: сіе выраженіе покажетъ намъ многія примѣчательныя свойства дополнительныхъ хордъ. Фиг. 15.

Означимъ чрезъ q и q' тангенсы угловъ, составляемыхъ дополнительными хордами AO′ и A′O′ большей оси съ сею осью A A′.

Хорда A O проходитъ чрезъ точку A, коей координаты суть: $y = o$ и $x = -a$, почему уравненіе оной будетъ:

$y = q(x + a)$, замѣняя въ общемъ уравненіи $y - \mathfrak{C} = a'(x - \alpha)$ прямой проходящей чрезъ данную точку, координаты $\mathfrak{C}$ и α величинами: o и $-a$.

Хорда A′ O′ проходитъ чрезъ точку A′, коей координаты суть: $y = o$, и $x = +a$, почему уравненіе оной будетъ: $y = q'(x - a)$.

Для точки пресѣченія O′ сихъ хордъ, получимъ два уравненія: $y = q(x + a)$ и $y = q'(x - a)$; по перемноженіи оныхъ имѣемъ для сей точки: $y^2 = -qq'(a^2 - x^2)$, отношеніе между координатами точки O′. Но поелику точка O′ находится на Эллипсисѣ, то отношеніе между координатами ея будетъ: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Чтобы сіи отношенія были тожественныя, получимъ условіе: $qq' = -\frac{b^2}{a^2}$, которое и есть выраженіе для произведенія тангенсовъ угловъ, составляемыхъ дополнительными хордами большей оси съ сею осью.

Относительно къ дополнительнымъ хордамъ B O″ и B′ O″ меньшей оси, коихъ уравненія, по означеніи чрезъ s и s' тангенсовъ угловъ составляемыхъ оными съ сею осью, суть: $x = s(y - b)$, и $x = s'(y + b)$, получимъ слѣдующее отношеніе между координатами точки ихъ пресѣченія O″: $x^2 = -ss'(b^2 - y^2)$, и

для той же точки уравненіе Эллипсиса: $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$.

Сравнивъ сіи отношенія будемъ имѣть условіе: $s\,s' = -\frac{a^2}{b^2}$, которое и есть выраженіе для произведенія тангенсовъ угловъ составляемыхъ дополнительными хордами меньшей оси съ сею осью.

Положивъ $b = a$ въ уравненіи $q\,q' = -\frac{b^2}{a^2}$, получимъ $q\,q' = -1$, то есть что дополнительныя хорды въ кругѣ между собою перпендикулярны.

Изъ сего слѣдуетъ что всѣ углы составляемые между собою дополнительными хордами большей оси будутъ тупые; для удостовѣренія въ семъ, опишемъ на большей оси AA′ полкруга A Q A′, проведемъ двѣ какія ни есть дополнительныя хорды A N и A′ N, и дополнительныя хорды круга A Q и A′ Q, проходящія чрезъ точку пресѣченія Q съ кругомъ прямой NQ перпендикулярной къ большей оси AA′; получимъ: уг. AQS < уг. ANS и уг. A′QS < уг. A′NS, а посему уг. AQS + уг. A′QS < уг. ANS + уг. A′NS, или уг. A′QA < уг. ANA′, но уголъ A′QA, какъ мы аналитически доказали, есть прямой, изъ чего и слѣдуетъ что уг. A N A′ дополнительныхъ хордъ будетъ тупой.

Подобное разсужденіе покажетъ намъ, что какія ни есть дополнительныя хорды B O″, B′O″ упирающіяся въ концы малой оси состa-

вляютъ между собою уголъ острой: въ семъ случаѣ кругъ описанный на малой оси какъ на діаметрѣ упадетъ внутрь Эллипсиса.

Наибольшій и наименьшій углы, составляемые дополнительными хордами между собою.

46) Уголъ составленный дополнительными хордами, пресѣкающимися въ концѣ малой оси, будетъ наибольшій; а уголъ составленный дополнительными хордами, пресѣкающимися въ концѣ большей оси, будетъ наименьшій.

Чтобы доказать сіе замѣтимъ, что тангенсъ угла составляемаго хордою A B, проходящею чрезъ конецъ B малой оси, съ большею осью есть $\frac{b}{a}$; разсмотримъ углы дополнительныхъ хордъ въ одной четверти A O′ B Эллипсиса, ибо углы въ прочихъ четвертяхъ будутъ равны онымъ. Для сего возмемъ на четверти A O′ B какую ни есть точку O′: хорда AO′ будетъ составлять съ осью AA′ уголъ, коего тангенсъ будетъ больше $\frac{b}{a}$, почему и положимъ, что *tang.* O′AA′ равенъ $\frac{b}{a} + u$. Тангенсъ угла, составляемаго съ осью A A′ хордою A′O′, которая есть дополнительная хорды AO′, опредѣлится изъ условнаго уравненія $q\,q' = -\frac{b^2}{a^2}$; откуда *tang.* O′ A′A $(= q') = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{b}{a} + u}$;

поставивъ величины для *tang.* O′A′A и *tang.* O′AA′ въ общее выраженіе тангенса угла, составленнаго двумя прямыми, получимъ:

$tang AO'A' \left(= \frac{q - q'}{1 + qq'}\right) = \frac{\frac{b}{a} + u + \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{b}{a} + u}}{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, выраженіе тангенса для всѣхъ угловъ, составляемыхъ дополнительными хордами большей оси.

Поелику знаменатель $\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$ выведеннаго выраженія есть величина постоянная, то мы и займемся разсматриваніемъ одного токмо числителя онаго, то есть выраженія: $\left(\frac{b}{a} + u + \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{b}{a} + u}\right)$, или $\left(\frac{b}{a} + \frac{\frac{b}{a}u + u^2 + \frac{b^2}{a^2}}{\frac{b}{a} + u}\right)$; по раздѣленіи самымъ дѣломъ величины $\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{b}{a}u + u^2\right)$ на $\left(\frac{b}{a} + u\right)$ получимъ, по сокращеніи: $\frac{2b}{a} + \frac{u^2}{\frac{b}{a} + u}$. Наименьшая величина сего выраженія, посему наименьшая величина тангенса, и слѣдовательно, поелику уголъ тупой (45), наибольшая величина угла нами разсматриваемаго соотвѣтствуетъ случаю, въ которомъ дробь $\frac{u^2}{\frac{b}{a} + u}$ равна нулю; но тогда $tang: O'AA' \left(= \frac{b}{a} + u\right)$ обращается въ $\frac{b}{a}$, а посему хорда AO' совпадаетъ съ хордою AB, проходящею чрезъ конецъ B малой оси, и получаемъ уг: ABA', которой и будетъ, по до-

казанному наибольшій изъ составляемыхъ дополнительными хордами.

Относительно къ тангенсамъ угловъ, составляемыхъ дополнительными хордами малой оси съ сею осью, имѣемъ условное уравненіе: $s\,s' = -\frac{a^2}{b^2}$ (45); хорда A′B составляетъ съ осью уголъ, коего тангенсъ равенъ $\frac{a}{b}$; почему выраженіе тангенса угла, составляемаго какими ни есть дополнительными хордами BO″ и B′O″ малой оси, будетъ:

$$tang.\,BO''B' \left(= \frac{s - s'}{1 + s\,s'}\right) = \frac{\frac{a}{b} + u + \frac{\frac{a^2}{b^2}}{\frac{a}{b} + u}}{1 - \frac{a^2}{b^2}}.$$

Поелику знаменатель $\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)$ выведеннаго выраженія есть величина постоянная, то мы и займемся разсматриваніемъ одного числителя онаго, то есть выраженія: $\frac{a}{b} + u + \frac{\frac{a^2}{b^2}}{\frac{a}{b} + u}$; произведя съ онымъ дѣйствія уже изъясненныя нами относительно къ выраженію $\left(\frac{b}{a} + u + \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{b}{a} + u}\right)$, получимъ: $\frac{2a}{b} + \frac{u^2}{\frac{a}{b} + u}$. Самая наименьшая ве-

личина сего выраженія, по сему самая наименьшая величина тангенса, и слѣдовательно, поелику уголъ острый, самая наименьшая величина угла, соотвѣтствуетъ случаю когда дробь $\frac{u^2}{\frac{a}{b}+u}$ равна нулю, то есть когда $u=0$, но въ семъ случаѣ *tang.* O″BB′ обращается въ $\frac{a}{b}$, по чему хорда BO″ совпадаетъ съ хордою BA′, проходящею чрезъ конецъ A′ большей оси, и получаемъ уг: BA′B′, который и будетъ по доказанному, наименьшій изъ составляемыхъ дополнительными хордами.

47) Чтобы вывесть уравненіе эллипсиса, отнесеннаго къ его вершинѣ, возмемъ уравненіе эллипсиса отнесеннаго къ центру; оное есть

Уравненіе эллипсиса, отнесеннаго къ вершинѣ.

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Назвавъ x' новую абсцису AP отъ вершины A, выразимъ въ величинѣ оной начальную абсцису OP($=x$); получимъ: $x=a-x'$; поставивъ сію величину x въ уравненіе $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, получимъ: Фиг. 14.

$$a^2y^2+b^2(a^2-2ax'+x'^2)=a^2b^2, \text{ или}$$

$$a^2y^2+a^2b^2+2ab^2x'+b^2x'^2=a^2b^2, \text{ откуда:}$$

$$y^2=\frac{2b^2}{a}x'-\frac{b^2}{a^2}x'^2; \text{ или, замѣнивъ}$$

неопредѣленное x' неопредѣленнымъ x, получимъ:

$$y^2=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2, \text{ уравненіе эллипсиса,}$$

когда начало координатъ въ вершинѣ, или отнесеннаго къ вершинѣ.

Положивъ въ ономъ для краткости $\frac{2b^2}{a} = p$, и замѣтивъ, что тогда $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{2a}$, получимъ:

$$y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2.$$

Величина $p\left(= \frac{2b^2}{a}\right)$ называется *параметромъ*.

Свойства параметра въ эллипсисѣ.

48) По умноженіи числителя и знаменателя условной величины $\frac{2b^2}{a}$ для параметра, на 2, получимъ: $p = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b \cdot 2b}{2a}$, или

$2a : 2b = 2b : p$; изъ чего и видно, что *параметръ есть третія пропорціональная прямая къ двумъ осямъ эллипсиса.*

Взявъ въ разсужденіе уравненіе $y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2$ и положивъ въ ономъ $x = c'\,(= a - c)$, то есть разстоянію отъ вершины до фокуса, получимъ:

$y^2 = pc' - \frac{p}{2a}c'^2 = p\left(c' - \frac{c'^2}{2a}\right) = p\left(\frac{2ac' - c'^2}{2a}\right)$, гдѣ y представляетъ ординату проходящую чрезъ фокусъ; поставя вмѣсто c' величину $(a - c)$, получимъ: $y^2 = p\left(\frac{a^2 - c^2}{2a}\right)$, или $y^2 = p \cdot \frac{b^2}{2a} = \frac{p}{2} \cdot \frac{2b^2}{2a} = \frac{p}{4} \cdot \frac{2b^2}{a}$, или $4y^2 = p^2$, откуда $p = 2y$, то есть: *параметръ равенъ удвоенной ординатѣ проходящей чрезъ фокусъ.*

49) Уравненіе $y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2$ можетъ принять видъ: $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax - x^2)$, или $y^2 = \frac{p}{2a}(2a - x)x$, откуда $\frac{y^2}{(2a-x)x} = \frac{p}{2a}$, гдѣ $(2a - x)$ есть абсциса соотвѣтствующая тойже ординатѣ y, но щитающаяся отъ другаго конца большей оси. Сіе выраженіе показываетъ намъ, что отношеніе между квадратами ординатъ и произведеніями изъ соотвѣтствующихъ онымъ абсцисъ, щитая сіи абсцисы отъ вершинъ, равно $\frac{p}{2a}$, то есть постоянно.

Квадраты ординатъ относятся между собою какъ произведенія изъ соотвѣтствующихъ имъ абсцисъ, щитая сіи абсцисы отъ вершинъ.

Посему предположивъ двѣ точки на эллипсисѣ, коихъ координаты представя чрезъ X и Y, X′ и Y′, получимъ:

$$\frac{Y^2}{(2a-X)X} = \frac{p}{2a}, \text{ и } \frac{Y'^2}{(2a-X')X'} = \frac{p}{2a};$$

откуда будемъ имѣть: $Y^2 : Y'^2 = (2a - X)X : (2a - X')X'$, изъясненное нами свойство эллипсиса.

50) Займемся теперь изысканіемъ не существуетъ ли системы косоугольныхъ координатъ, къ которой бы отнесенный эллипсисъ выражался уравненіемъ, имѣющимъ видъ подобный уравненію $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ эллипсиса, отнесеннаго къ осямъ.

Уравненіе эллипсиса, отнесеннаго къ сопряженнымъ діаметрамъ.

Для сего, оставляя начало координатъ въ центрѣ, перемѣнимъ прямоугольныя координаты въ косоугольныя, къ чему послужатъ намъ формулы (39):

$x = u \sin. \psi + t \cos. \varphi$,

$y = t \sin. \varphi + u \cos. \psi$, въ которыхъ φ означаетъ уголъ составленный осями t и x, а ψ уголъ составленный осями u и y.

Поставивъ величины x и y въ уравненіе $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 t^2 \sin.^2 \varphi + 2 a^2 t u \sin. \varphi \cos. \psi + a^2 u^2 \cos.^2 \psi \\ + b^2 u^2 \sin.^2 \psi + 2 b^2 t u \sin. \psi \cos. \varphi + b^2 t^2 \cos.^2 \varphi \end{array}\right\} = a^2 b^2,$$

или разположивъ по степенямъ перемѣнныхъ u и t, будемъ имѣть:

$$(a^2 \sin.^2 \varphi + b^2 \cos.^2 \varphi) t^2 + 2(a^2 \sin. \varphi \cos. \psi + b^2 \sin. \psi \cos \varphi) tu + (b^2 \sin.^2 \psi + a^2 \cos.^2 \psi) u^2 = a^2 b^2,$$

Чтобы сіе уравненіе имѣло видъ, подобный уравненію $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, получимъ условіе: $a^2 \sin. \varphi \cos. \psi + b^2 \sin. \psi \cos. \varphi = 0$, и уравненіе обратится въ

$$(a^2 \sin.^2 \varphi + b^2 \cos.^2 \varphi) t^2 + (b^2 \sin.^2 \psi + a^2 \cos.^2 \psi) u^2 = a^2 b^2,$$

Условное уравненіе $a^2 \sin. \varphi \cos. \psi + b^2 \sin. \psi \cos. \varphi = 0$, опредѣляетъ намъ одинъ изъ угловъ φ и ψ, что и показываетъ что другой уголъ остается произвольнымъ, то есть можетъ имѣть безчисленное множество величинъ, а посему существуетъ безчисленное множество системъ координатъ, при которыхъ уравненіе эллипсиса можетъ имѣть видъ уравненія $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ онаго, отнесеннаго къ его центру и осямъ.

Для опредѣленія точекъ, въ которыхъ эллипсисъ встрѣчаетъ оси координатъ t и u

положимъ поперемѣнно $u = 0$; и $t = 0$; тогда получимъ:

$a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 sin.\Phi + b^2 cos.^2\Phi}$, и $b'^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 sin.^2\psi + a^2 cos.^2\psi}$, гдѣ $\pm a'$ и $\pm b'$ означаютъ разстоянія отъ центра до точекъ пресѣченія эллипсиса съ осями t и u.

Введя сіи разстоянія въ уравненіе конечное между t и u получимъ:

$\frac{a^2b^2}{a'^2}.t^2 + \frac{a^2b^2}{b'^2}.u^2 = a^2b^2$, или $a'^2u^2 + b'^2t^2 = a'^2b'^2$;

сіе уравненіе имѣетъ видъ совершенно подобный уравненію $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, почему и заключимъ, что ось абсцисъ t раздѣляетъ хорды параллельныя оси u пополамъ, и обратно.

Діаметромъ мы назвали всякую прямую проходящую чрезъ центръ эллипсиса; а *сопряженными діаметрами*, называются діаметры, изъ коихъ одинъ раздѣляетъ пополамъ хорды параллельныя другому: оси суть также сопряженные діаметры, но составляющіе между собою прямый уголъ.

Изъ сего опредѣленія заключимъ, что уравненіе $a'^2u^2 + b'^2t^2 = a'^2b'^2$ есть уравненіе эллипсиса отнесеннаго къ его сопряженнымъ діаметрамъ; въ семъ уравненіи $2a'$ и $2b'$ означаютъ длины сихъ діаметровъ.

51) Уравненіе эллипсиса относительно къ осямъ составляетъ частный случай уравненія: $(a^2 sin.^2\Phi + b^2 cos.^2\Phi)t^2 + (b^2 sin.^2\psi + a^2 cos.^2\psi)u^2 = a^2b^2$ эллипсиса отнесеннаго къ сопряженнымъ діа-

Переходъ изъ уравненія эллипсиса отнесен-

ваго къ сопряженнымъ діаметрамъ къ уравненію онаго отнесеннаго къ осямъ.

метрамъ, что и согласно съ тѣмъ, что мы сказали относительно къ осямъ въ § 50. И дѣйствительно, полагая въ ономъ уравненіи что $\varphi = 0$, и $\psi = 0$, и замѣтивъ что ось ординатъ и ось абсцисъ означались нами въ прямоугольныхъ координатахъ чрезъ x и y, по-причинѣ, что тогда $sin.\varphi = 0$, $cos.\varphi = 1$, $sin.\psi = 0$, $cos.\psi = 1$, получимъ: $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, уравненіе эллипсиса отнесеннаго къ его центру и осямъ.

Прямоугольникъ изъ осей равенъ параллелограмму изъ сопряженныхъ діаметровъ.

52) Перемноживъ между собою выраженія: $a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 sin.^2\Phi + b^2 cos.^2\Phi}$ и $b'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 cos.^2\psi + b^2 sin.^2\psi}$ получимъ: $a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{a^4 sin^2\Phi cos^2\psi + a^2b^2(sin^2\Phi sin^2\psi + cos^2\Phi cos^2\psi) + b^4 sin^2\psi cos^2\Phi}$.

Условное уравненіе полученное нами при переходѣ изъ системы осей къ системѣ сопряженныхъ діаметровъ есть (50):
$a^2\, sin.\,\varphi\, cos.\,\psi + b^2\, sin.\,\psi\, cos.\,\varphi = 0$; по возвышеніи онаго въ квадратъ получимъ:
$a^4 sin^2\Phi cos^2\psi + 2a^2b^2 sin\Phi cos\psi sin\psi cos\Phi + b^4 sin^2\psi cos^2\Phi = 0$,
откуда:
$a^4 sin.^2\Phi cos.^2\psi + b^4 sin.^2\psi cos^2\Phi = -2a^2b^2 sin\Phi cos\psi sin\psi cos\Phi$.

По введеніи въ выраженіе $a'^2\,b'^2$ сей величины для $(a^4 sin.^2\varphi . cos.^2\psi + b^4 sin.^2\psi cos.^2\varphi)$ получимъ:
$a'^2b'^2 = \frac{a4b4}{a^2b^2(sin^2\Phi sin^2\psi - 2sin\Phi sin\psi cos\Phi cos\psi + cos^2\Phi cos^2\psi)}$,
или замѣчая что $sin.^2\varphi . sin.^2\psi - 2sin.\varphi sin.\psi cos.\varphi\, cos.\,\psi + cos.^2\varphi - cos.^2\psi = (sin.\varphi sin.\psi - cos.\varphi cos.\psi)^2 = cos.^2(\varphi + \psi)$, будемъ имѣть:

$a'^2b'^2=\frac{a^2b^2}{cos.^2(\Phi+\Psi)}$, или $ab=a'b'cos.(\Phi+\Psi)$.

Поеликуже Φ и Ψ сутъ углы составляемые осью x съ осью t, и осью y съ осью u, то означивъ чрезъ A′ уголъ между осями t и u, будемъ имѣть: $A'+\Phi+\Psi=90°$, слѣдовательно $cos.(\Phi+\Psi)=sin.A'$; а посему получимъ: $ab=a'b'sin.A'$, гдѣ $b'sin.A'$ означаетъ высоту параллелограмма изъ полусопряженныхъ діаметровъ, слѣдовательно $a'b'sin.A'=OP'QR$, а посему изъ выведеннаго нами равенства $ab=a'b'sin.A'$, умноженнаго съ обѣихъ сторонъ на четыре слѣдуетъ, что прямоугольникъ D‴D″D′D изъ осей, равенъ параллелограмму QQ′Q″Q‴ изъ сопряженныхъ діаметровъ. Фиг. 14.

53) Чтобы найти отношеніе существующее между осями и сопряженными діаметрами должно имѣть пять уравненій, которыя сутъ: 1.)$a'^2=\frac{a^2b^2}{a^2sin^2\Phi+b^2cos.^2\Phi}$, 2.)$b'^2=\frac{a^2b^2}{b^2sin^2\Psi+a^2cos^2\Psi}$, 3.)$a^2sin.\Phi cos.\Psi+b^2sin.\Psi cos.\Phi=0$, 4.)$sin.^2\Psi+cos.^2\Psi=1$, и 5.)$sin.^2\Phi+cos.^2\Phi=1$.

Сумма квадратовъ изъ сопряженныхъ діаметровъ равна суммѣ квадратовъ изъ осей.

Изъ сихъ уравненій изключимъ $sin.\Phi$, $sin.\Psi$, $cos.\Phi$, и $cos.\Psi$, почему и получимъ искомое отношеніе между a, b, a' и b'.

Для сего замѣтимъ, что по перемноженіи первыхъ двухъ уравненій и введеніи въ сей выводъ третьяго уравненія, имѣли (52):

$$a^2b^2=a'^2b'^2cos.^2(\varphi+\psi).$$

Поставивъ въ (1) и (2) уравненія вмѣсто a^2b^2 сію величину, получимъ по сокращеніи:

$$a'^2 \cos.^2(\varphi+\psi) = a^2 \sin.^2\varphi + b^2 \cos.^2\varphi,$$
$$b'^2 \cos.^2(\varphi+\psi) = b^2 \sin.^2\psi + a^2 \cos.^2\psi.$$

Симъ уравненіямъ, введя въ оныя (4) и (5) можемъ дать видъ:

$$a'^2\cos^2(\varphi+\psi) = a^2\sin^2\varphi(\sin^2\psi+\cos^2\psi) + b^2\cos^2\varphi(\sin^2\psi+\cos^2\psi),$$
$$b'^2\cos^2(\varphi+\psi) = b^2\sin^2\psi(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) + a^2\cos^2\psi(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi);$$

взявъ сумму сихъ уравненій, получимъ:

$$(a'^2+b'^2)\cos^2(\varphi+\psi) = (a^2+b^2)(\sin^2\psi\sin^2\varphi+\cos^2\psi\cos^2\varphi) + 2a^2\cos^2.\psi\sin^2.\varphi + 2b^2\cos^2.\varphi\sin.\psi.$$

Въ семъ уравненіи, чтобы предстоящій величины (a^2+b^2) былъ полный квадратъ опъ $(\sin.\varphi\sin.\psi - \cos.\psi\cos.\varphi)$ $(= \cos.(\varphi-\psi))$ недостаетъ токмо члена $-\sin.\varphi\sin.\psi\cos.\varphi\cos.\psi$; по введеніи онаго, получимъ:

$$(a'^2+b'^2)\cos.^2(\varphi+\psi) = (b^2+a^2)\cos.^2(\varphi+\psi) + 2(\cos.\psi\sin.\varphi + \sin.\psi\cos\varphi)(a^2\cos.\psi\sin.\varphi + b^2\cos.\varphi\sin.\psi),$$

что по причинѣ уравненія (4) $a^2\cos.\psi\sin.\varphi + b^2\cos.\varphi\sin.\psi = 0$ обращается въ $a'^2+b'^2 = a^2+b^2$, уравненіе, которое бывъ умножено съ обѣихъ сторонъ на четыре, показываетъ намъ, что въ эллипсисѣ сумма квадратовъ изъ сопряженныхъ діаметровъ равна суммѣ квадратовъ изъ осей.

Уравненіе для рѣшенія вопросовъ относительно къ сопряженныхъ діаметровъ.

54) Мы вывели предъ симъ слѣдующія три уравненія: $a^2\sin.\varphi\cos.\psi + b^2\sin.\psi\cos.\varphi = 0$, $ab = a'b'\cos.(\varphi+\psi)$, $a^2+b^2 = a'^2+b'^2$.

Сіи уравненія опредѣляютъ три какія ни есть изъ шести количествъ: a, b, a', b', φ и ψ,

когда три изъ оныхъ даны, изъ чего слѣдуетъ, что сіи три уравненія могутъ служить къ разрѣшенію всѣхъ вопросовъ, относящихся къ изысканію системы сопряженныхъ діаметровъ когда дана система осей, и обратно.

женнымъ діаметрамъ и осямъ.

55) Уравненіе $a^2 sin.\Phi cos.\psi + b^2 sin.\psi cos.\Phi = 0$, по раздѣленіи онаго на $cos.\varphi\, cos.\psi$, приметъ видъ: $\frac{a^2 sin.\Phi}{cos.\Phi} = -\frac{b^2 sin.\psi}{cos.\psi}$, или $a^2 tang.\Phi = -b^2 tang.\psi$.

О б щ е е свойство дополнительныхъ хордъ и сопряженныхъ діаметровъ, и построеніе по о н о м у сихъ послѣднихъ.

Замѣчая что φ и ψ означаютъ углы, составленные осью t съ осью x, и осью u съ осью y, и положивъ что уголъ составленный осью u съ осью x, то есть и другимъ сопряженнымъ діаметромъ съ тою же осью равенъ A будемъ имѣть $\psi = 90° - A$, откуда $tang.\psi = cotg.A = \frac{1}{tang.A}$; по введеніи сей величины для $tang.\psi$ въ уравненіе между онымъ и $tang.\varphi$, получимъ:

$a^2 tang.\Phi = -\frac{b^2}{tang.A}$, откуда $tang.\Phi tang.A = -\frac{b^2}{a^2}$, то есть что въ эллипсисѣ произведеніе изъ тангенсовъ угловъ, составляемыхъ сопряженными діаметрами съ большею осью постоянно, и именно равно $-\frac{b^2}{a^2}$.

Сравнивъ сіе уравненіе съ уравненіемъ $qq' = -\frac{b^2}{a^2}$ (45) получимъ: $qq' = tang.\varphi tang.A$, то есть что произведеніе изъ тангенсовъ уг-

ловъ составленныхъ сопряженными діаметрами съ большею осью, равно произведенію изъ тангенсовъ угловъ составляемыхъ съ тою же осью дополнительными хордами сей оси; изъ чего и слѣдуетъ, что уравнявъ одинъ изъ сихъ угловъ сопряженныхъ діаметровъ одному изъ сихъ угловъ дополнительныхъ хордъ, получимъ равенство между остальными углами; или, что по проведеніи діаметра параллельно одной изъ дополнительныхъ хордъ, сопряженный онаго діаметръ будетъ параллеленъ другой хордѣ.

Отсюда слѣдуетъ весьма легкій способъ построить сопряженные діаметры, составляющіе между собою данный уголъ.

Для сего на одной изъ осей описываютъ дугу соотвѣтствующую данному углу; чрезъ точку пресѣченія сей дуги съ эллипсисомъ проводятъ въ концы сей оси дополнительныя хорды, которыя и будутъ параллельны искомымъ сопряженнымъ діаметрамъ; послѣ чего построятъ сіи діаметры проведя изъ центра прямыя параллельныя найденнымъ дополнительнымъ хордамъ.

Поелику мы доказали (45) что углы дополнительныхъ хордъ большей оси суть тупые, а углы дополнительныхъ хордъ малой оси суть острые, то явно что въ случаѣ когда данъ для сопряженныхъ діаметровъ уголъ тупой, изъясненное строеніе производится

на большой оси, ежели же острой, то на малой.

Сія задача не всегда возможна, ибо существуютъ предѣлы относительно къ величинѣ угла, который могутъ составлять между собою сопряженные діаметры; когда данный уголъ выдетъ изъ сихъ предѣловъ дуга круга не пресѣчетъ эллипсиса.

Для построенія сопряженныхъ діаметровъ составляющихъ между собою наибольшій или наименьшій уголъ, проводятъ чрезъ центръ эллипсиса прямыя параллельныя дополнительнымъ хордамъ большей оси проходящимъ чрезъ конецъ малой, или прямыя параллельныя дополнительнымъ хордамъ малой оси, проходящимъ чрезъ конецъ большой. (46)

56) Для опредѣленія сопряженныхъ діаметровъ равныхъ между собою, возмемъ выведенныя нами уравненія (53): $a'^2 cos.^2(\varphi+\psi) = a^2 sin.^2\varphi + b^2 cos.^2\varphi$, $b'^2 cos.^2(\varphi+\psi) = b^2 sin.^2\psi + a^2 cos.^2\psi$; положивъ $a' = b'$ получимъ изъ оныхъ: Построеніе сопряженныхъ діаметровъ равныхъ между собою.

$$a^2 sin.^2\varphi + b^2 cos.^2\varphi = b^2 sin.^2\psi + a^2 cos.^2\psi, \text{ или}$$
$$a^2(sin.^2\varphi - cos.^2\psi) - b^2(sin.^2\psi - cos.^2\varphi) = 0;$$

что бы сіе уравненіе существовало независимо отъ a и b, должно имѣть:

$$sin.^2\varphi - cos.^2\psi = 0, \text{ и } sin.^2\psi - cos.^2\varphi = 0,$$

откуда: $cos.\psi = \pm sin.\varphi$, и $sin.\psi = \pm cos.\varphi$.

Сіи величины для $cos.\psi$ и $sin.\psi$, немогутъ быть взяты съ одинакими знаками, ибо онѣ должны удовлетворять уравненію (55)

$a^2 sin.\varphi cos.\psi + b^2 sin.\psi cos.\varphi = 0 \ldots (s)$, изъ котораго $a^2\ tang.\ \varphi = -b^2\ tang.\ \psi$; почему и должно взять: ($cos.\psi = +sin.\varphi$, и $sin.\psi = -cos.\varphi$) или ($cos.\psi = -sin.\varphi$, и $sin.\psi = +cos.\varphi$); въ обѣихъ сихъ предположеніяхъ система координатъ остается таже. Введя напримѣръ первое изъ сихъ условій въ уравненіе (s) получимъ:

$a^2 sin.^2\varphi - b^2 cos.\varphi = 0$, откуда $tang.\varphi = \pm\frac{b}{a}$,

гдѣ верхній знакъ относится къ одному изъ діаметровъ, а нижній къ сопряженному діаметру онаго. Мы знаемъ, что тангенсы угловъ, составляемыхъ съ большею осью дополнительными хордами оной оси, проходящими чрезъ конецъ малой, суть: $+\frac{b}{a}$ и $-\frac{b}{a}$; изъ чего и заключимъ, что равные сопряженные діаметры параллельны симъ хордамъ, а посему что равные сопряженные діаметры составляютъ между собою наибольшій уголъ.

Уравненіе эллипсиса отнесеннаго къ равнымъ сопряженнымъ діаметрамъ, положивъ $a' = b'$ въ уравненіи $a'^2 y^2 + b'^2 x'^2 = a'^2 b'^2$ будетъ:

$y^2 + x^2 = a'^2$; сіе уравненіе имѣетъ тожественный видъ съ уравненіемъ круга между прямоугольными координатами, описаннаго на одномъ изъ сихъ діаметровъ.

57) Чтобы вывести уравненіе касательной къ эллипсису, проведенной чрезъ данную внѣ онаго точку, положимъ, что α и β представляютъ намъ координаты данной точки, и $y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$ (47) данное уравненіе эллипсиса, въ которомъ посему a и b даны.

Уравненіе касательной проведенной къ эллипсису чрезъ точку данную внѣ онаго.

Чрезъ данную точку вообразимъ какую нибудь сѣкущую, и неопредѣленныя координаты точекъ пресѣченія оной съ эллипсисомъ означимъ чрезъ x' и y', x'' и y''.

Уравненіе прямой проходящей чрезъ данную точку есть: $y - \beta = A(x - \alpha)$, гдѣ A есть величина неопредѣленная, которую и должно опредѣлить изъ условій вопроса.

Дабы вывести сіе условіе замѣтимъ, что сѣкущая будетъ касательною тогда, когда точки ея пресѣченія съ эллипсисомъ сольются въ одну точку, то есть когда разность между абсцисами x'' и x' оныхъ будетъ равна нулю, или когда имѣемъ условіе $x' - x'' = 0$; почему и опредѣлимъ величины для x' и x'' въ величинахъ α, β, a, b и A.

Для сего сыщемъ абсцисы точекъ пресѣченія предположенной сѣкущей съ эллипсисомъ; для чего и положимъ, что въ уравненіяхъ:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2, \text{ и } y - \beta = A(x - \alpha)$$

неопредѣленныя x и y, имѣютъ туже величину; сіи координаты будутъ тогда принадле-

жать точкѣ пресѣченія сихъ двухъ линій. И такъ для опредѣленія абсцисы x сей точки, исключимъ y изъ сихъ уравненій; получимъ послѣдовательно: $(\beta+A(x-\alpha))^2-\frac{2b^2}{a}x+\frac{b^2}{a^2}x^2=0$, или $\beta^2+2A\beta(x-\alpha)+A^2(x-\alpha)^2-\frac{2b^2}{a}x+\frac{b^2}{a^2}x=0$, или $(A^2+\frac{b^2}{a^2})x^2+2(A\beta-A^2\alpha-\frac{b^2}{a})x=2A\beta\alpha-\beta^2-A^2\alpha^2$; откуда

$$x=-\frac{a(Aa\beta-A^2\alpha-b^2)}{A^2a^2+b^2}\pm\sqrt{\frac{a^2(2A\beta\alpha-\beta^2-A^2\alpha^2)}{A^2a^2+b^2}+\frac{a^2(Aa\beta-A^2a\alpha-b^2)^2}{(A^2a^2+b^2)^2}}.$$

Двойственная величина абсцисы x показываетъ что прямая пресѣкаетъ эллипсисъ въ двухъ точкахъ: удержавъ означенія чрезъ x', и x'' абсцисъ сихъ двухъ точекъ, усматриваемъ, что величины x' и x'' будутъ выведенныя нами двѣ величины для x; взявъ разность между сими величинами и уравнявъ оную нулю, получимъ по сокращеніи:

$(A^2a^2+b^2)(2A\mathfrak{C}\alpha-\mathfrak{C}^2-A^2\alpha^2)+(Aa\mathfrak{C}-A^2a\alpha-b^2)^2=0$,

условное уравненіе касанія, въ которомъ A уже означаетъ тангенсъ угла, составляемаго искомою касательною съ осью абсцисъ. Выведя изъ сего уравненія величину для A и поставивъ оную въ уравненіе $y-\mathfrak{C}=A(x-\alpha)$ получимъ искомое уравненіе касательной.

Условное уравненіе касанія весьма сократится, естьли предположимъ, что данная точка совпадаетъ съ осью абсцисъ x, то есть что $\mathfrak{C}=0$; введя сіе условіе въ уравненіе касанія получимъ:

$-A^2\alpha^2(A^2a^2+b^2)+(A^2a\alpha+b^2)^2=0$, или $-A^2\alpha^2+2a\alpha A^2+b^2=0$, откуда $A=\pm\frac{b}{\sqrt{\alpha^2-2a\alpha}}$; а по сему уравненіе касательной въ семъ случаѣ будетъ:

$$y=\pm\frac{b}{\sqrt{\alpha^2-2a\alpha}}(x-\alpha).$$

Двойный знакъ опредѣляетъ двѣ касательныя удовлетворяющія вопросу, и находящіяся одна съ низу, другая съ верху оси абсцисъ x.

Разсмотримъ выраженіе $\frac{b}{\sqrt{\alpha^2-2a\alpha}}$; мы видимъ, что оное будетъ дѣйствительное токмо тогда когда $\alpha^2>2a\alpha$, или когда $\alpha>2a$; естьли же возмемъ для α величину отрицательную, то выраженіе $\frac{b}{\sqrt{\alpha^2-2a\alpha}}$ перемѣняется въ $\frac{b}{\sqrt{\alpha^2+2a\alpha}}$ и будетъ всегда дѣйствительное: не трудно видѣть, что сіи предѣлы для α показываютъ таковую величину оной, чтобы данная точка не находилась внутри эллипсиса.

Уравненіе касательной къ эллипсису, проведенной чрезъ точку данную на ономъ.

58) Чтобы вывести уравненіе касательной къ эллипсису, проведенной чрезъ точку на ономъ, положимъ, что координаты данной точки суть: α и $\mathfrak{C}$, а уравненіе эллипсиса

$$y^2=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Условное уравненіе касанія выведенное нами есть:

$(A^2a^2+b^2)+(A\mathfrak{C}\alpha-\mathfrak{C}^2-A^2\alpha^2)+(Aa\mathfrak{C}-A^2a\alpha-b^2)^2=0$.

Поелику данная точка находится на эллипсисѣ, то ея координаты α и $\mathfrak{C}$ должны удо-

влетворять уравненію эллипсиса, почему и получимъ условіе $\beta^2 = \frac{2b^2}{a}\alpha - \frac{b^2}{a^2}\alpha^2$; поставивъ въ условное уравненіе касанія вмѣсто β^2 сію величину, по сокращеніи получимъ: $A^2(\alpha^2 - 2a\alpha)$

$$+ 2A\beta(a - \alpha) - \frac{b^2}{a^2}(a - \alpha)^2 = 0;$$

введя въ сіе уравненіе на мѣсто $(\alpha^2 - 2a\alpha)$ величину $-\frac{a^2\beta^2}{b^2}$, извлеченную изъ условнаго уравненія $\beta^2 = \frac{2b^2}{a^2}\alpha - \frac{b^2}{a^2}\alpha^2$, получимъ:

$$-\frac{a^2\beta^2}{b^2}A^2 + 2A\beta(a-\alpha) - \frac{b^2}{a^2}(a-\alpha)^2 = 0, \text{ или}$$

$$A^2 - \frac{2b^2}{a^2}\left(\frac{a-\alpha}{\beta}\right)A + \frac{b^4}{a^4}\frac{(a-\alpha)^2}{\beta^2} = 0; \text{ или}$$

$$\left(A - \frac{b^2}{a^2}\frac{(a-\alpha)}{\beta}\right)^2 = 0, \text{ откуда } A = \frac{b^2}{a^2}\frac{(a-\alpha)}{\beta},$$

а посему уравненіе искомой касательной будетъ:

$$y - \beta = \frac{b^2}{a^2}\frac{(a-\alpha)}{\beta}(x - \alpha),$$

гдѣ y и x суть координаты какой ни есть точки на касательной, а α и β координаты данной точки касанія.

Выраженіе подкасательной въ эллипсисѣ; построеніе касательной

59) Опредѣлимъ точку, въ которой касательная встрѣчаетъ ось абсцисъ x; для сего положимъ въ уравненіи касательной $y = 0$; тогда x перемѣнится въ AT, и мы получимъ:

$$-\beta = \frac{b^2}{a^2}\frac{(a-\alpha)}{\beta}(AT - \alpha), \text{ откуда}$$

$AT - \alpha = -\frac{a^2 \beta^2}{b^2(a-\alpha)}$, и по вставленіи вмѣсто β^2 величины $\frac{b^2(2a\alpha - \alpha^2)}{a^2}$, получимъ:

къ эллипсису помощію круга. Фиг. 15.

$$AT - \alpha = -\frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha};$$

но поелику α означается чрезъ AP, то PT будетъ означена чрезъ $AT - \alpha$, и мы будемъ имѣть:

$$PT = -\frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha}.$$

Прямая PT называется *подкасательною*, почему выведенное нами выраженіе есть выраженіе подкасательной въ Эллипсисѣ. Когда имѣемъ сію прямую, тогда касательная опредѣлится соединеніемъ точки T съ данною точкою касанія M.

Выраженіе подкасательной выведенное нами, не заключаетъ въ себѣ малой оси b, изъ чего и слѣдуетъ, что для всѣхъ Эллипсисовъ имѣющихъ туже большую ось, а посему и для круга коего діаметромъ будетъ большая ось, подкасательная таже. Изъ чего и видно, что описавъ на большей оси AA′ кругъ, и продолживъ ординату данной на Эллипсисѣ точки M, до точки пресѣченія M′ оной ординаты съ кругомъ, по проведеніи въ точкѣ M′ касательной къ кругу получимъ подкасательную PT и для точки M Эллипсиса, а посему соединивъ конецъ ея T съ точкою M данною на Эллипсисѣ, опредѣлимъ искомую касательную MT.

Уравненіе нормальной въ эллипсисѣ; выраженія поднормальной, касательной и нормальной.

6о) Поелику нормальная проходитъ чрезъ точку касанія перпендикулярно къ касательной, которой уравненіе (58) есть: $y-\beta=\frac{b^2(a-\alpha)}{a^2\beta}(x-\alpha)$, то уравненіе нормальной къ эллипсису будетъ:

$$y-\beta=\frac{a^2\beta}{b^2(\alpha-a)}(x-\alpha);$$

въ сихъ двухъ уравненіяхъ тангенсы $\frac{b^2(a-\alpha)}{a^2\beta}$ и $\frac{a^2\beta}{b^2(\alpha-a)}$ удовлетворяютъ условному уравненію $a'a''+1=0$, перпендикулярности двухъ прямыхъ.

По положеніи $y=0$ въ уравненіи нормальной MR, величина абсцисы x перемѣнится въ AR и мы получимъ: $-\beta=\frac{a^2}{b^2(\alpha-a)}\beta(AR-\alpha)$, или $-1=\frac{a^2}{b^2(\alpha-a)}(AR-\alpha)$; откуда $AR-\alpha(=PR)=\frac{b^2}{a^2}(\alpha-a)$.

Прямая PR называется *поднормальною*, почему выведенное нами выраженіе есть выраженіе поднормальной въ эллипсисѣ. Чтобы вывести выраженія для касательной MT и нормальной MR, берутся въ помощь треугольники PMT и PMR, изъ коихъ: $MT=\sqrt{MP^2+PT^2}$, и $MR=\sqrt{MP^2+PR^2}$; по вставленіи въ сіи величины вмѣсто MP(=6) выраженія $\frac{b}{a}\sqrt{2a\alpha-\alpha^2}$, и вмѣсто PT и PR найденныхъ нами для оныхъ выраженій (59 и 6о) получимъ:

$$\text{M T} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - \alpha^2) + \left(\frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha}\right)^2},$$

$$\text{M R} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - \alpha^2) + \frac{b^4}{a^4}(a - \alpha)^2},$$

выраженія *касательной и нормальной* въ Эллипсисѣ.

61) Чтобы изслѣдовать положеніе касательной MT′ относительно къ положенію прямыхъ FM, и F′M проведенныхъ изъ точки касанія M въ фокусы F и F′, найдемъ выраженія тангенсовъ угловъ FMT′ и CMT′, составляемыхъ касательною M T′ съ сими прямыми. Предположимъ для простоты въ изчисленіи что начало координатъ въ центрѣ Эллипсиса: означивъ абсцису точки M отъ центра O чрезъ α', будетъ $\alpha - \alpha' = a$, почему тангенсъ угла составляемаго касательною MT′ съ осью абсцисъ, $tang.\ \text{M T}'\text{A} \left(= \frac{b^2(a-\alpha)}{a^2 \beta}\right) = -\frac{b^2 \cdot \alpha'}{a^2 \cdot \beta}$, гдѣ β и α' должны удовлетворять уравненію $a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$ Эллипсиса отнесеннаго къ центру.

Положеніе касательной относительно къ радіусамъ векторамъ, проходящимъ чрезъ точку касанія. Фиг. 16.

Тангенсъ угла составляемаго прямою MF съ осью абсцисъ: $tang.\ \text{M F A} = -\frac{\beta}{c - \alpha'}$, а тангенсъ угла составляемаго прямою MF′ съ тою же осью: $tang.\ \text{M F}'\text{A} = \frac{\beta}{c + \alpha'}$, притомъ общее выраженіе тангенса угла составляемаго двумя прямыми есть: $\frac{a' - a''}{1 + a'a''}$. Почему и получимъ:

$$tang.\,FMT' = \frac{\frac{\beta}{c-\alpha'} - \frac{b^2.\,\alpha'}{a^2.\,\beta}}{1 + \frac{b^2.\,\alpha'}{a^2.(c-\alpha')}} = \frac{a^2\beta^2 + b^2\alpha'^2 - b^2\alpha' c}{a^2 c\beta - (a^2 - b^2)\beta\alpha'};$$

или, замѣчая что $a^2 - b^2 = c^2$, и точка коей координаты α и β находится на Эллипсисѣ, по сокращеніи получимъ: $tang.\,FMT' = \frac{b^2}{c\beta}$.

Поступивъ подобнымъ образомъ для нахожденія выраженія тангенса угла $F'MT'$, которое будетъ: $\frac{\frac{\beta}{c+\alpha'} - \frac{b^2.\,\alpha'}{a^2.\,\beta}}{1 + \frac{b^2.\,\alpha'}{a^2.(c+\alpha')}}$, получимъ окончательно: $tang.\,F'MT' = \frac{-b^2}{c\beta}$; но поелику уг. $F'MT' +$ уг. $CMT' = 180^\circ$, то и будетъ $tang.\,CMT' = -tg.\,F'MT' = \frac{b^2}{c\beta}$.

Изъ всего сего слѣдуетъ, что уг. $FMT' =$ уг. CMT', то есть, что касательная въ Эллипсисѣ раздѣляетъ пополамъ уголъ, служащій дополненіемъ до 180° углу, составленному между собою радіусами векторами, проходящими чрезъ точку касанія.

Откуда слѣдуетъ, что нормальная раздѣляетъ пополамъ уголъ составленный радіусами векторами, проходящими чрезъ точку, въ которой проведена нормальная къ Эллипсису.

Геометрическія построенія касательной.

62) Доказанное нами предъ симъ свойство ма легкій способъ построенія оной:

тельныхъ къ эллипсису: проведенной чрезъ точку на онемъ, и проведенной чрезъ точку внѣ онаго.

а) Положимъ что точка M, изъ коей требуется провести касательную, дана на Эллипсисѣ.

Продолжимъ одинъ изъ радіусовъ векторовъ, напримѣръ F′M, и по продолженію онаго отъ данной точки M отложимъ длину MC равную другому радіусу вектору MF: прямая MT, проведенная перпендикулярно къ прямой FC, будетъ по доказанному касательною къ Эллипсису.

Легко можно доказать, что всѣ точки сей прямой находятся внѣ Эллипсиса, то есть что оныя не находятся ни на Эллипсисѣ, ни внутри онаго. Для сего возмемъ, гдѣ ни есть на сей прямой точку m; проведемъ прямыя: mF', mF и mC; будетъ: $mC+mF'>MC+MF'$, но $MC=MF$, и $mC=mF$, почему и получимъ: $mF+mF'>MF+MF'$, или $mF+mF'>2a$, то есть что точка m не находится на Эллипсисѣ. Чтобъ доказать, что оная не находится внутри Эллипсиса, возмемъ какую ни есть точку m' внутри сей кривой; проведемъ прямую $m'F$; будемъ имѣть: $m'F+m'F'<FM+MF'$, или $m'F+m'F'<2a$, и такъ для всякой точки находящейся внутри Эллипсиса сумма ея разстояній до фокусовъ меньше большей оси $2a$. Поелику же для точки m, имѣли $mF+mF'>2a$, то изъ сего и заключимъ, что точка m касательной MT не находится и внутри Эллипсиса.

b) Положимъ что точка Q, изъ коей должно провести касательную, дана внѣ Эллипсиса.

Изъ точки F' радіусомъ $F'C$ равнымъ большей оси ($=2a$), описываютъ дугу CC': изъ данной точки Q радіусомъ QF, описываютъ дугу CFC'; точки пресѣченія C и C' сихъ дугъ, соединяютъ съ фокусомъ F' прямыми CF' и $C'F'$; точки встрѣчи M и M' сихъ прямыхъ съ Эллипсисомъ, будутъ точками касанія къ сей кривой двухъ касательныхъ QM и QM', проведенныхъ чрезъ данную точку. Ибо, напримѣръ для касательной MQ, по проведеніи прямыхъ CQ, CF и FM, имѣемъ: $CQ=QF$; $CM+MF'=2a$, притомъ $MF+MF'=2a$, слѣдовательно $CM=MF$; прямая MQ общая; а посему $\triangle CQM=\triangle QMF$; и слѣд. уг. $CMQ=$ уг. QMF.

Опредѣленіе аналитически положеніе касательной къ эллипсису, проведенной параллельно данной прямой.

63) Естьли бы требовалось къ Эллипсису провести касательную параллельную прямой, данной ея уравненіемъ: $y=a'x+b'$, тогда означивъ координаты искомой точки касанія чрезъ x' и y', получили бы для тангенса угла составляемаго касательною къ Эллипсису въ сей точкѣ, выраженіе: $\frac{b^2}{a^2}\frac{(a-x')}{y'}$ . . . (58).

Поелику искомая касательная должна быть параллельна данной прямой, то и будемъ имѣть условіе: $\frac{b^2}{a^2}\frac{(a-x')}{y'}=a'$, въ которомъ x' и y' суть координаты искомой точки касанія. Поелику же сія точка находится на Эллипсисѣ, то и получимъ условіе:

$$y'^2 = \frac{2b^2}{a} x' - \frac{b^2}{a^2} x'^2.$$

Изъ сихъ двухъ условій вопроса опредѣлимъ x' и y'; найденныя величины для оныхъ опредѣлятъ точку касанія, изъ которой проведенная параллельно данной прямой прямая, будетъ искомая касательная; уравненіе оной будетъ: $y - y' = a'(x - x')$, гдѣ x' и y' предположены имѣющими величины опредѣленныя нами изъ показанныхъ условій вопроса.

Проведеніе касательныхъ къ эллипсису посредствомъ сопряженныхъ діаметровъ.

64) Уравненіе $a'^2 u^2 + b'^2 t^2 = a'^2 b'^2$ Эллипсиса отнесеннаго къ центру и сопряженнымъ діаметрамъ, изъ котораго имѣемъ: $u = \pm \frac{a'}{b'} \sqrt{a'^2 - t^2}$, и $t = \pm \frac{a'}{b'} \sqrt{b'^2 - u^2}$, показываетъ намъ что ось u раздѣляетъ хорды параллельныя діаметру t на двѣ равныя части, и обратно; и притомъ когда $t = \pm a'$, получаемъ $u = o$, и когда $u = \pm b'$, получаемъ $t = o$, что показываетъ, что прямыя параллельныя діаметру u, проведенныя изъ концевъ діаметра t, имѣютъ токмо по одной общей точкѣ съ Эллипсисомъ, то есть по концу сего діаметра, и обратно, что прямыя параллельныя діаметру t проведенныя изъ концевъ діаметра u имѣютъ токмо по одной общей точкѣ съ Эллипсисомъ, а именно по концу сего діаметра; то есть что прямыя проведенныя изъ концевъ какого ни есть діаметра параллельно сопряженному онаго діаметру, касательны въ сихъ точкахъ къ Эллипсису. По-

елику оси суть частный случай сопряженныхъ діаметровъ (51), то сіе свойство существуетъ и для осей.

Основываясь на семъ свойствѣ сопряженныхъ діаметровъ можно провести касательную къ Эллипсису изъ данной точки на ономъ. Для сего чрезъ данную точку и центръ проводятъ діаметръ; посредствомъ дополнительныхъ хордъ, строятъ сопряженный оному: прямая проведенная чрезъ данную точку на Эллипсисѣ параллельно сему послѣднему будетъ искомая касательная.

Чтобы провести параллельно данной прямой касательную къ Эллипсису, проводятъ систему дополнительныхъ хордъ, изъ коихъ бы одна была параллельна данной прямой; по симъ хордамъ строятъ сопряженные діаметры изъ коихъ одинъ будетъ параллеленъ данной прямой; изъ концевъ сопряженнаго сему діаметра проводятъ прямыя параллельныя данной прямой: сіи прямня будутъ искомыя касательныя.

Въ сихъ строеніяхъ мы предполагали, что дана система осей; въ случаѣ, когда дано очертаніе Эллипсиса, сія система легко опредѣлена быть можетъ. Для нахожденія центра проводятъ два діаметра, основываясь на томъ что всякой діаметръ раздѣляетъ пополамъ систему какихъ ни есть параллельныхъ между собою хордъ; точка пресѣченія сихъ двухъ

діаметровъ будетъ центромъ даннаго Эллипсиса. Изъ центра какимъ ни есть разстояніемъ GO отъ онаго до точки на Эллипсисѣ описываютъ дугу GG′; точки пресѣченія G и G′ сей дуги съ Эллипсисомъ соединяютъ прямою GG′, которая и будетъ параллельна одной изъ осей: изъ центра проводятъ прямую OB параллельную прямой GG′, которая и будетъ направленіемъ сей оси; прямая OP опущенная изъ центра перпендикулярно на оную, будетъ направленіемъ другой оси; длина осей опредѣлится точками пресѣченія построенныхъ ихъ направленій съ Эллипсисомъ, послѣ чего и видно будетъ, гдѣ направленіе большой, и гдѣ направленіе малой оси. Очевидно, что OP раздѣляетъ хорды къ оной перпендикулярныя пополамъ, изъ чего и слѣдуетъ, что опредѣленная нами система есть система осей.

65) Отношеніе между радіусомъ векторомъ z и абсцисою x, какой ни есть точки на Эллипсисѣ выведенное нами въ §41, есть: Полярное уравненіе Эллипсиса.

$$z = \frac{-cx + a^2}{a}, \text{ или } z = a^2 - \frac{cx}{a}.$$

Сіе отношеніе можетъ быть употреблено къ построенію Эллипсиса по точкамъ; для сего придавъ абсцисѣ x какую ни есть величину опредѣлимъ изъ сего уравненія соотвѣтствующую оной величину z; точка M въ которой дуга описанная изъ фокуса F радіусомъ сей величины z пресѣчетъ ординату PM со-

Фиг. 17. отвѣтствующую приданной величинѣ абсцисѣ x, будетъ находиться на Эллипсисѣ.

Уравненіе $z = \frac{a^2 - cx}{a}$, которое такимъ образомъ служитъ къ построенію Эллипсиса, можетъ быть названо посему уравненіемъ сей кривой.

По введеніи въ оное вмѣсто абсцисы O P ($= x$) отъ центра, абсцисы P F ($=$ напримѣръ x') отъ фокуса, то есть, по положеніи въ ономъ: $x = c - x'$, получимъ:

$$z = \frac{a^2 - c^2 + cx'}{a}, \text{ или } z = \frac{b^2 + cx'}{a},$$

замѣчая что въ Эллипсисѣ $a^2 - c^2 = b^2$.

Въ сіе уравненіе вводятъ обыкновенно уголъ составляемый радіусомъ векторомъ съ осью: сей уголъ будетъ измѣняться вмѣстѣ съ длиною z радіуса вектора. И такъ положимъ, что уголъ AFM$=\Phi$, получимъ: $x' = -z\cos.\Phi$ изъ треугольника PMF; по вставленіи сей величины x' въ уравненіе, будемъ имѣть:

$$z = \frac{b^2 - cz\cos.\Phi}{a}, \text{ откуда } z = \frac{b^2}{a + c\cos.\Phi}.$$

Уравненіе всякой кривой, въ которомъ оная отнесена къ системѣ координатъ исходящихъ изъ тойже точки, называется уравненіемъ *полярнымъ*, а самая сія точка *полюсомъ*; почему выведенное нами уравненіе есть полярное уравненіе Эллипсиса.

Сіе уравненіе по введеніи въ оное параметра, то есть положивъ въ ономъ $b^2 = \frac{ap}{2}$, приметъ видъ:

$$z = \frac{\frac{1}{2}ap}{a + c\cos.\Phi} \text{ или } z = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \frac{c}{a}\cos.\Phi}.$$

Или положивъ $\frac{c}{a} = e$, что даетъ $p\left(= 2a\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\right) = 2a\left(1 - e^2\right)$, получимъ:

$$z = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos.\Phi}.$$

ОБЪ ИПЕРБОЛѢ.

66) *Иперболою* называется кривая линія, въ которой разность разстояній отъ двухъ неподвижныхъ точекъ до всякой ея точки постоянна. И такъ для выведенія уравненія Иперболы предложимъ вопросъ вывести уравненіе кривой, имѣющей сіе свойство. Уравненіе иперболы отнесенной къ ея центру и осямъ.

Для сего пусть F и F′ представляютъ намъ данныя неподвижныя точки; разстояніе F F′ между оными означимъ чрезъ $2c$; положимъ, что данная постоянная разность разстояній отъ точекъ F и F′ до какой ни есть точки M на искомой кривой предполагаемой равна $2a$. Раздѣлимъ прямую F F′ по поламъ въ точкѣ O: будемъ имѣть FO = F′O = c; про- Фиг. 18.

ведемъ прямую O Y перпендикулярно къ F F′, и примемъ сію прямую F F′ и прямую O Y за ось абсцисъ x и ось ординатъ y; тогда неопредѣленныя координаты OP и PM какой ни есть точки M предположенной на искомой кривой означутся чрезъ x и y.

Для разрѣшенія вопроса найдемъ отношеніе между x и y выражающее свойство кривой, на которой принадлежащая симъ координатамъ точка M находится. Проведемъ прямыя FM и F′M и означимъ оныя чрезъ z и z'; свойство кривой будетъ выражено уравненіемъ $z' - z = 2a$. Въ треугольникахъ FMP и F′MP будемъ имѣть $FP = c - x$, и $F'P = c + x$; откуда получимъ:

$$z = \sqrt{y^2 + (c-x)^2} = \sqrt{y^2 + c^2 - 2cx + x^2}; \text{ и}$$

$$z' = 2a + z = \sqrt{y^2 + (c+x)^2} = \sqrt{y^2 + c^2 + 2cx + x^2}; \text{ или}$$

$$z^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2; \text{ и}$$

$4a^2 + 4az + z^2 = y^2 + c^2 + 2cx + x^2$; вычтя изъ перваго уравненія второе, будемъ имѣть $4az + 4a^2 = 4cx$, или $az + a^2 = cx$, откуда $z = \frac{cx - a^2}{a}$. Поставивъ величину z въ уравненіи $z^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$, получимъ

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2y^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2 \text{ или}$$

$$a^2y^2 - (c^2 - a^2)x^2 = -a^2(c^2 - a^2),$$

уравненіе искомой кривой то есть иперболы; поелику въ треуг. MFF′ имѣемъ $F'M < FM + FF'$,

то и будетъ $2a + z < z + 2c$ или $2a < 2c$, то есть $c > a$, почему $c^2 - a^2$ будетъ всегда положительное, и такъ положимъ $c^2 - a^2 = b^2$; вставивъ въ уравненіе будемъ имѣть:

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2.$$

67) Изслѣдуемъ теперь (9) свойство кривой, которой уравненіе предъ симъ нами выведено; для сего извлечемъ изъ онаго величину ординаты y въ величинѣ абсцисы x; получимъ: Изслѣдованіе иперболы.

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Положимъ $x = 0$, получимъ $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{-a^2} = \pm b \sqrt{-1}$, откуда видно, что искомая линія не встрѣтитъ никогда оси ординатъ y, ибо величина разстоянія отъ центра O до сей предположенной точки встрѣчи есть мнимая.

Положивъ въ данномъ уравненіи $y = 0$, получимъ изъ онаго $x = \pm a$ величину показывающую намъ, что точки A и A′ взятыя на оси абсцисъ отъ начала координатъ въ разстояніяхъ: AO $(= +a)$ и A′O $(= -a)$ будутъ точками пресѣченія искомой кривой съ осью абсцисъ.

Придавъ данному уравненію видъ: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x + a)(x - a)}$ легко усмотрѣть можно, что отъ $x\ (= 0)$ до $x\ (= \pm a)$ кривая линія точекъ имѣть не будетъ, ибо взявъ $x < \pm a$

*

въ обоихъ сихъ случаяхъ получаемъ для y величину мнимую; величина y будетъ дѣйствительная только тогда, когда x равенъ или больше $\pm a$; изъ чего и заключимъ, что предложенная даннымъ уравненіемъ кривая не будетъ имѣть точекъ въ пространствѣ, заключенномъ между прямыми D D′, D″ D‴ чрезъ точки ея пресѣченія съ осью абсцисъ параллельно оси ординатъ проведенными; въ обѣ же стороны отъ центра O за сими прямыми простираться будетъ безпредѣльно, ибо чемъ величина x будетъ больше, тѣмъ величина y будетъ увеличиваться, такъ что не существуетъ предѣла возрастанія ординаты y при возрастаніи абсцисы x. При томъ уравненіе $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ показываетъ, что для какой ни есть величины x напримѣръ $+n > a$ получимъ двѣ равныя величины y но только съ противными знаками, и что взявъ туже величину x отрицательно, то есть $-n > a$ имѣемъ для y двѣ величины совершенно равныя предъидущимъ; изъ чего и заключимъ, что часть кривой соотвѣтствующая абсцисамъ отрицательнымъ, совершенно равна части кривой, соотвѣтствующей абсцисамъ положительнымъ и притомъ что каждая изъ сихъ частей симетрически разположена относительно къ оси абсцисъ, а потому и къ оси ординатъ.

Сблизивъ всѣ сіи разсужденія, усматриваемъ, что ипербола есть кривая несомкнутая, состоящая изъ двухъ вѣтвей X A X′ и Y A Y′ отдѣленныхъ между собою разстояніемъ A A′ ($=2a$) и простирающихся въ безконечность. Прямая A A′ ($=2a$) называется *первою или пресѣкающею осью*, а прямая B B′ означенная въ уравненіи чрезъ $2b$, для которой пресѣченіе Иперболы не опредѣляетъ дѣйствительной величины, для тожества съ Эллипсисомъ, *второю или непресѣкающею осью* Иперболы, точка O *центромъ*, точки F и F′ *фокусами*; разстояніе фокусовъ F и F′ до центра O означенное чрезъ c ($=\sqrt{a^2+b^2}$) называется *эксцентрицитетомъ*, прямыя F M и F′ M *радіусами векторами*. Замѣтимъ, что уравненіе $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ называется уравненіемъ Иперболы, *отнесенной къ ея центру и осямъ*.

Фокусы F и F′ весьма легко могутъ быть построены по даннымъ положеніемъ и длиною осямъ; для сего конецъ B второй оси соединяютъ съ концемъ A первой оси прямою B A и сію прямую BA отлагаютъ въ обѣ стороны отъ центра O по оси абсцисъ: точки, опредѣленныя симъ отложеніемъ будутъ искомые фокусы, ибо въ треуг. B A O имѣемъ: $B A = \sqrt{a^2+b^2} = c$.

Перемѣнивъ x на y и y на x въ уравненіи $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, получимъ:

$$a^2 x^2 - b^2 y^2 = -a^2 b^2, \text{ или}$$
$$b^2 y^2 - a^2 x^2 = a^2 b^2;$$

поелику сіе уравненіе есть тоже какъ и предложенное, токмо здѣсь ось абсцисъ взята за ось ординатъ, а ось ординатъ за ось абсцисъ; то явно, что оное принадлежитъ тойже Иперболѣ, въ чемъ и можемъ удостовѣриться изслѣдовавъ сіе уравненіе. Въ немъ предположеніе $x = o$ опредѣляетъ для y величину дѣйствительную, а предположеніе $y = o$ даетъ для x величину мнимую, почему Иперболa не пересѣчетъ тогда оси AA′, и будетъ состоять изъ двухъ вѣтвей TB″U и T′B″′U′. При семъ ея положеніи ось B B′ будетъ первою осью, почему и говорится, что оная отнесена къ ея второй оси, ибо на сей послѣдней считаются абсцисы.

Свойство центра въ иперболѣ; сравненіе уравненій иперболы и эллипсиса; уравненіе иперболы равностороннеи.

68) Центръ въ Иперболѣ имѣетъ тоже свойство какъ и въ Эллипсисѣ; доказательство сего свойства совершенно подобно предложенному нами (43) относительно къ Эллипсису, ибо объ сіи кривыя разположены симетрически между осями координатъ; діаметръ сохраняетъ тоже опредѣленіе.

Сравнимъ уравненія Иперболы и Эллипсиса, отнесенныхъ къ центру и осямъ, что весьма облегчитъ насъ въ послѣдствіи. Сіе сравненіе показываетъ, что для перехода отъ уравненія $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ Эллипсиса (42)

къ уравненію $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ Иперболы, должно перемѣнить въ первомъ b на $b\sqrt{-1}$.

Когда оси Иперболы равны между собою, ея уравненіе принимаетъ видъ:

$$y^2 - x^2 = -a^2.$$

Ипербола, которой оси равны, называется *равностороннею*, почему сіе уравненіе есть уравненіе Иперболы равносторонней; оная между иперболами занимаетъ тоже мѣсто, какое кругъ между Эллипсисами, ибо должно сдѣлать въ уравненіи Эллипсиса также предположеніе равенства осей, чтобы перейти изъ онаго къ уравненію круга.

Построенія иперболы: по точкамъ и по непрерывному движенію.

69) Выведенныя нами свойства Иперболы представляютъ способъ построенія сей кривой по точкамъ:

а) Величина ординаты y извлеченная изъ уравненія Иперболы есть:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2};$$

придадимъ какую ни есть величину ($> a$) абсцисѣ x, тогда соотвѣтствующая оной величина y опредѣлится изъ отношенія:

$a : b = \sqrt{x^2 - a^2} : y$, въ которомъ a и b даны; а $\sqrt{x^2 - a^2}$ есть катетъ прямоугольнаго треугольника, коего ипотенуза равна величинѣ ($> a$) приданной абсцисѣ x, а другой катетъ равенъ a. Отложивъ построенную

такимъ образомъ величину y по перпендикуляру, возставленному къ первой оси изъ конца абсцисы x ($>a$) получимъ одну изъ точекъ иперболы; притомъ сіи же величины x и y опредѣляютъ еще три точки иперболы; послѣ чего повторимъ сіе строеніе столько разъ, сколько нужно точекъ для очерченія сей кривой.

b) Мы знаемъ что въ Иперболѣ $z'-z=2a$; по приданіи величины одному изъ радіусовъ векторовъ z и z', величина другаго опредѣлится изъ сего уравненія; и такъ какимъ ни есть разстояніемъ z ($> c-a$) опишемъ дугу изъ точки F какъ изъ центра: потомъ изъ точки F' опишемъ дугу радіусомъ равнымъ $2a+z$; точка пресѣченія M сихъ двухъ дугъ будетъ принадлежать Иперболѣ, ибо получимъ для оной:

$$F'M - FM = 2a + z - z = 2a.$$

Другая точка пресѣченія M' сихъ двухъ дугъ принадлежитъ также Иперболѣ и должна находиться на продолженіи ординаты PM точки M. Повторяютъ сіе строеніе столько разъ сколько нужно будетъ, и такимъ образомъ построятъ одну вѣтвь XAX' Иперболы; поелику другая вѣтвь $YA'Y'$ равна построенной, то и можетъ быть опредѣлена помощію сей послѣдней.

Описываніе Иперболы по непрерывному движенію основывается на свойствѣ Иперболы, выражаемомъ уравненіемъ $z' - z = 2a$.

Для сего въ одномъ изъ фокусовъ F′ прикрѣпляется концемъ ея линейка F′M такъ, чтобы оная могла обращаться около точки F′; къ другому концу M сей линейки прикрѣпляется нить FM, коей другой конецъ закрѣпленъ въ фокусѣ F: разность между длиною F′M линейки и длиною нити FM должна быть взята равною первой оси A A′ ($= 2a$). Явно, что когда нить FM будетъ натянута въ точкѣ M, то сія точка будетъ принадлежать Иперболѣ, ибо имѣемъ для оной F′M − FM $= 2a$, дабы описать часть иперболы натягиваютъ нить FM посредствомъ колышка такъ, чтобы одна часть ея M′S лежала по направленію линейки: точка M′ будетъ принадлежать Иперболѣ, ибо имѣемъ F′M − (SM′ + M′F) $= 2a$; а посему F′S − SM′ − M′F $= 2a$, то есть F′M′ − FM′ $= 2a$; такимъ образомъ обращая линейку около точки F′ получимъ часть иперболы, коей фокусы F и F′, а ось $2a$, описанную концемъ натягивающаго нить колышка. Фиг. 19.

О дополнительныхъ хордахъ.

70) Предложимъ вопросъ вывести общее выраженіе для произведенія изъ тангенсовъ угловъ, составляемыхъ дополнительными хордами первой оси съ сею осью, въ Иперболѣ.

Означимъ чрезъ q и q' тангенсы угловъ составляемыхъ какими ни есть дополнитель-

ными хордами A′M, AM первой оси съ сею осью AA′.

Хорда A′M проходитъ чрезъ точку A′, коей координаты суть: $y=0$, и $x=-a$, почему уравненіе оной будетъ:

$y=q(x+a)$, замѣняя въ уравненіи $y-\zeta=a'(x-\alpha)$ прямой проходящей чрезъ данную точку, координаты ζ и α величинами: 0 и $-a$.

Хорда AM проходитъ чрезъ точку A, коей координаты суть: $y=0$, и $x=+a$, почему уравненіе оной будетъ:

$$y=q'(x-a).$$

Для точки пресѣченія M сихъ хордъ получимъ два уравненія: $y=q(x+a)$ и $y=q'(x-a)$; по перемноженіи оныхъ имѣемъ для сей точки: $y^2=qq'(x^2-a^2)$, отношеніе между координатами точки M. Но поелику точка M находится на Иперболѣ, то отношеніе между координатами ея будетъ: $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$. Чтобы сіи два отношенія были тожественны, получимъ условіе:

$$qq'=\frac{b^2}{a^2},$$

которое и есть постоянное выраженіе для произведенія изъ тангенсовъ угловъ, составляемыхъ въ Иперболѣ какими ни есть дополнительными хордами первой оси съ сею осью. Изъ сего выраженія слѣдуетъ что сіи углы

мѣютъ ихъ тригонометрическіе тангенсы съ динаковыми знаками.

Положивъ въ семъ выраженіи $b = a$, получимъ:

$q\,q' = 1$, то есть въ равносторонней иперболѣ хорды сіи составляютъ съ осью углы, коихъ сумма равна углу прямому.

Свойство дополнительныхъ хордъ круга есть тоже самое (45): разность состоитъ въ томъ, что въ кругѣ углы, составляемые дополнительными хордами съ діаметромъ обращены отверстіями ихъ въ разныя стороны, а въ равносторонней иперболѣ въ туже.

71) Чтобы вывести уравненіе иперболы, отнесенной къ вершинѣ, возмемъ уравненіе иперболы, отнесенной къ ея центру: оное есть

Уравненіе иперболы, отнесенной къ вершинѣ.

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2.$$

Назвавъ x' новую абсцису AP отъ вершины A, выразимъ въ величинѣ оной начальную абсцису OP ($= x$), получимъ: $x = a + x'$; поставивъ сію величину x въ уравненіе иперболы, будемъ имѣть: Фиг. 18.

$$a^2 y^2 - b^2 (a^2 + 2\,a\,x' + x'^2) = -a^2 b^2, \text{ или}$$

$$y = \frac{2b^2}{a} x' + \frac{b^2}{a^2} x'^2, \text{ гдѣ замѣнивъ}$$

неопредѣленное x' неопредѣленнымъ x, получимъ:

$y^2 = \frac{2b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2$, уравненіе иперболы когда начало координатъ въ вершинѣ или отнесенной къ вершинѣ.

Положивъ въ ономъ для краткости $\frac{2b^2}{a} = p$ и замѣтивъ, что тогда $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{2a}$, получимъ:

$$y^2 = p x + \frac{p}{2a} x^2.$$

Величина $p \left(= \frac{2b^2}{a}\right)$ называется *параметромъ*.

Свойство параметра въ иперболѣ.

72) По умноженіи числителя и знаменателя условной величины для параметра на 2, получимъ:

$p = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b \cdot 2b}{2a}$, или $2a : 2b = 2b : p$, изъ чего видно, что въ иперболѣ, равно какъ и въ Эллипсисѣ, *параметръ есть третія пропорціональная прямая къ двумъ осямъ Иперболы.*

Взявъ въ разсужденіе уравненіе $y^2 = px + \frac{p}{2a} x^2$, и положивъ въ ономъ $x = c' \left(= c - a\right)$, то есть разстоянію отъ вершины до фокуса, получимъ:

$$y^2 = pc' - \frac{p}{2a} c'^2 = p\left(c' + \frac{c'^2}{2a}\right) = p\left(\frac{2ac' + c'^2}{2a}\right),$$

гдѣ y представляетъ ординату проходящую чрезъ фокусъ; поставивъ вмѣсто c' величину $c - a$, получимъ

$y^2 = p\frac{(c^2 - a^2)}{2a}$, или $y^2 = p\frac{b^2}{2a} = \frac{p}{2} \cdot \frac{2b^2}{2a} = \frac{p}{4} \cdot \frac{2b^2}{a}$,

или $4y^2=p^2$, откуда $p=2y$, то есть въ Иперболѣ, равно какъ и въ Эллипсисѣ, *параметръ равенъ удвоенной ординатѣ проходящей чрезъ фокусъ.*

73) Уравненіе $y^2=px+\frac{p}{2a}x^2$ можетъ принять видъ $y^2=\frac{p}{2a}(2ax+x^2)$, или $y^2=\frac{p}{2a}(2a+x)x$, откуда

$$\frac{y^2}{(2a+x)x}=\frac{p}{2a},$$ гдѣ $(2a+x)$ есть абсциса соотвѣтствующая также ординатѣ y, но считающаяся отъ другаго конца первой оси. Сіе выраженіе показываетъ намъ, что отношеніе между квадратами ординатъ и произведеніями изъ соотвѣтствующихъ онымъ абсцисъ, щитая сіи абсцисы отъ вершинъ, въ иперболѣ равно $\frac{p}{2a}$ то есть постоянно; почему предположивъ двѣ точки на иперболѣ, коихъ координаты представя чрезъ X и Y, x' и y' получимъ:

$$\frac{Y^2}{(2a+X)X}=\frac{p}{2a}, \text{ и } \frac{y'^2}{(2a+x')x'}=\frac{p}{2a},$$

откуда будемъ имѣть:

$Y^2:y'^2=(2a+X)X:(2a+x')x'$ изъясненное нами свойство иперболы, тожественое съ свойствомъ эллипсиса.

Квадраты ординатъ относятся между собою какъ произведенія изъ соотвѣтствующихъ онымъ абсцисъ, щитая сіи абсцисы отъ вершинъ.

74) Займемся теперь изысканіемъ, не существуетъ ли системы косоугольныхъ координатъ, къ которой бы отнесенная ипербола выражалась уравненіемъ, имѣющимъ видъ ура-

Уравненіе иперболы отнесенной къ сопряжен-

ными діаметрамъ.

вненія $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ иперболы отнесенной къ ея центру и осямъ.

Для сего, оставляя начало координатъ въ центрѣ, перемѣнимъ прямоугольныя координаты въ косоугольныя, къ чему послужатъ намъ формулы: (39)

$$x = u\sin.\psi + t\cos.\varphi;$$

$$y = t\sin.\varphi + u\cos.\psi,$$ въ которыхъ φ означаетъ уголъ, составленный осями t и x а ψ уголъ между осями u и y.

Поставивъ величины x и y въ уравненіе $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, получимъ:

$$(a^2\sin.^2\varphi - b^2\cos.^2\varphi)t^2 + 2(a^2\sin.\varphi\cos.\psi - b^2\sin.\psi\cos.\varphi)tu + (a^2\cos.^2\psi - b^2\sin.^2\psi)u^2 = -a^2b^2;$$

чтобы сіе уравненіе имѣло видъ подобный уравненію $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, получимъ условіе:

$$a^2\sin.\varphi\cos.\psi - b^2\sin.\psi\cos.\varphi = 0,$$

и уравненіе между t и u обратится въ

$$(a^2\sin.^2\varphi - b^2\cos.^2\varphi)t^2 + (a^2\cos.^2\psi - b^2\sin.^2\psi)u^2 = -a^2b^2.$$

Условное уравненіе $a^2\sin.\varphi\cos.\psi - b^2\sin.\psi\cos.\varphi = 0$ опредѣляетъ намъ одинъ изъ угловъ φ и ψ изъ чего и слѣдуетъ, что другой уголъ остается произвольнымъ, то есть можетъ имѣть безчисленное множество величинъ, а по сему существуетъ безчисленное множество системъ координатъ, при которыхъ уравненіе иперболы имѣетъ видъ уравненія оной, отнесенной къ ея центру и осямъ.

Для опредѣленія точекъ, въ которыхъ ипербола встрѣчаетъ оси координатъ t и u

положимъ попеременно $u = 0$, и $t = 0$; тогда получимъ:

$$a'^2 = -\frac{a^2 b^2}{a^2 \sin.^2 \Phi - b^2 \cos.^2 \Phi} \text{ и } b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos.^2 \psi - b^2 \sin.^2 \psi};$$

гдѣ a' и b' означаютъ разстоянія отъ центра до точекъ пресѣченія иперболы съ осями t и u. Перемноживъ сіи два количества между собою какъ въ § 52 получимъ выводъ, который по причинѣ условнаго уравненія $a^2 \sin. \varphi \cos. \psi - b^2 \sin. \psi \cos. \varphi = 0$ можетъ принять видъ:

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{-a^2 b^2 \cos.(\Phi + \psi)^2};$$

сіе уравненіе показываетъ что одно изъ количествъ a' и b' будетъ мнимое, то есть что ипербола не встрѣчаетъ никогда въ то же время обоихъ ея діаметровъ. Взявъ произвольно одно изъ сихъ количествъ за мнимое, на примѣръ b', что предполагаетъ a' дѣйствительнымъ, то есть что a' взято за первую ось, для избѣжанія мнимыхъ количествъ представимъ чрезъ $-b'^2$ количество, которое означили чрезъ b'^2; получимъ:

$$a'^2 = -\frac{a^2 b^2}{a^2 \sin.^2 \Phi - b^2 \cos.^2 \Phi} \text{ и } b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos.^2 \psi - b^2 \sin.^2 \psi} \text{ или}$$

$$a^2 \sin.^2 \Phi - b^2 \cos.^2 \Phi = -\frac{a^2 b^2}{a'^2}, \text{ и } a^2 \cos.^2 \psi - b^2 \sin.^2 \psi = \frac{a^2 b^2}{b'^2};$$

по введеніи сихъ выраженій въ уравненіе иперболы, будемъ имѣть:

$$-\frac{a^2 b^2}{a'^2} t^2 + \frac{a^2 b^2}{b'^2} u^2 = -a^2 b^2, \text{ откуда}$$

$$a'^2 u^2 - b'^2 t^2 = -a'^2 b'^2,$$

уравненіе, которое выводится непосредственно изъ уравненія эллипсиса (50) перемѣняя въ семъ послѣднемъ b на $b\sqrt{-1}$.

Въ слѣдствіе опредѣленія сопряженныхъ діаметровъ (50) выведенное нами уравненіе называется уравненіемъ иперболы, отнесенной къ ея сопряженнымъ діаметрамъ.

Переходъ изъ уравненія иперболы, отнесенной къ сопряженнымъ діаметрамъ, къуравненію оной, отнесенной къ ея центру и осямъ.

75) Уравненіе $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ иперболы отнесенной къ ея центру и осямъ можетъ быть выведено изъ уравненія $(a^2 sin.^2\Phi + b^2 cos.^2\Phi)t^2 + (b^2 sin.^2\psi + a^2 cos.^2\psi)u^2 = -a^2b^2$ иперболы отнесенной къ ея сопряженнымъ діаметрамъ. Для сего должно токмо положить въ семъ послѣднемъ $\Phi = 0$, и $\psi = 0$, что предполагаетъ совмѣщеніе діаметровъ t и u съ осями x и y; тогда имѣемъ $sin.\psi = 0$, $cos.\psi = 1$, $sin.\Phi = 0$, $cos.\Phi = 1$, и замѣтивъ, что t обращается въ x, а u въ y, получимъ точно уравненіе $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Сіе согласно съ тѣмъ, что оси суть частный случай сопряженныхъ діаметровъ тогда сіи послѣдніе составляютъ между собою уголъ прямый.

Прямоугольникъ изъ осей равенъ параллелограмму изъ сопряженныхъ діаметровъ.

76) Мы имѣли (74) уравненіе $a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{-a^2b^2\cos.^2(\Phi+\psi)}$; оное по принятіи a' за первую ось, обращается въ $a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{a^2b^2\cos.^2(\Phi+\psi)}$, или

$$a'b' = \frac{ab}{\cos.(\Phi+\psi)}.$$

Означивъ чрезъ A' уголъ между сопряженными діаметрами t и u, получимъ $A'=90^\circ-(\varphi+\psi)$ откуда $sin.\,A' = cos.\,(\varphi+\psi)$, и предложенное уравненіе обратится въ

$$a'b' = \frac{ab}{sin.\,A'}, \text{ или } ab = a'b'\,sin.\,A',$$

уравненіе подобное тому, которое имѣли въ эллипсисѣ, и которое по умноженіи съ обѣихъ сторонъ на четыре показываетъ, что *въ иперболѣ прямоугольникъ изъ осей равенъ параллелограмму изъ сопряженныхъ діаметровъ*.

77) Для нахожденія отношенія существующаго между осями и сопряженными діаметрами въ иперболѣ, имѣемъ пять уравненій:

Разность квадратовъ изъ сопряженныхъ діаметровъ равна разности квадратовъ изъ осей.

$$1)\ a'^2 = \frac{-a^2b^2}{a^2sin.^2\varphi - b^2cos.^2\psi} \quad 2)\ b'^2 = \frac{a^2b^2}{b^2sin^2\psi - a^2cos^2\varphi}$$

$$3)\ a^2sin.\varphi cos.\psi - b^2sin.\psi cos.\varphi = 0, \quad 4)\ sin.^2\psi - cos.^2\psi = 1,$$

и $5)\ sin.^2\varphi + cos.^2\varphi = 1.$

Сіи уравненія выводятся изъ уравненій (53) относительно къ эллипсису, перемѣняя въ сихъ послѣднихъ b' на $b'\sqrt{-1}$ и b на $b\sqrt{-1}$; почему явно, что слѣдуя, при изключеніи изъ сихъ пяти уравненій количествъ $sin.\,\varphi$, $sin.\,\psi$, $cos.\,\varphi$, $cos.\,\psi$, тому же ходу какъ и для эллипсиса, получимъ выводъ для иперболы, которой можетъ быть извлеченъ изъ вывода для эллипсиса, перемѣняя въ семъ послѣднемъ b' на $b'\sqrt{-1}$ и b на $b\sqrt{-1}$. И такъ для иперболы получимъ между a, b, a' и b' уравненіе:

$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$, показывающее по умноженіи съ обѣихъ сторонъ на четыре, что *въ иперболѣ разность квадратовъ изъ сопряженныхъ діаметровъ равна разности квадратовъ изъ осей.*

Уравненія для рѣшенія вопросовъ относительно къ сопряженнымъ діаметрамъ, и осямъ.

78) Мы вывели предъ симъ слѣдующія три уравненія:

$$a'\,b'\cos.(\phi + \psi) = a\,b,$$
$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2,$$
$$a^2 \sin.\phi \cos.\psi - b^2 \sin.\psi \cos.\phi = 0.$$

Сіи уравненія опредѣляютъ три какія ни есть изъ шести количествъ a, b, a', b', ϕ и ψ, когда три изъ оныхъ даны; изъ чего и слѣдуетъ что сіи три уравненія могутъ служить къ разрѣшенію всѣхъ вопросовъ относящихся въ иперболѣ къ изысканію системы сопряженныхъ діаметровъ когда дана система осей, и обратно.

Общее свойство дополнительныхъ хордъ и сопряженныхъ діаметровъ въ иперболѣ, и построеніе по оному сихъ послѣднихъ.

79) Уравненіе $a^2 \sin.\phi\cos.\psi - b^2 \sin.\psi\cos.\phi = 0$ по раздѣленіи онаго на $\cos.\phi\cos.\psi$ приметъ видъ

$$\frac{a^2 \sin.\phi}{\cos.\phi} = \frac{b^2 \sin.\psi}{\cos.\psi} \quad \text{или} \quad a^2 \,tang.\,\phi = b^2 \,tang.\,\psi.$$

Замѣчая, что ϕ и ψ означаютъ углы составленные осью t съ осью x и осью u съ осью y, и положивъ, что уголъ составленный осью u съ осью x, то есть и другимъ сопряженнымъ діаметромъ съ тою же осью равенъ A, будетъ $\psi = 90° - A$, откуда $tang.\psi = cot.A = \frac{1}{tang.A}$.

по введеніи сей величины для *tang.* ψ въ уравненіе между онымъ и *tan.* φ, получимъ:

$$a^2 tang.\Phi = \frac{b^2}{tang.A}, \text{ откуда } tang.\Phi tang.A = \frac{b^2}{a^2}.$$

Сравнивъ сіе уравненіе съ уравненіемъ $qq' = \frac{b^2}{a^2}$ (70) будемъ имѣть:

$$q\,q' = tang.\,\varphi.\,tang.\,A.$$

Сіе уравненіе показываетъ, что въ иперболѣ подобно какъ и въ эллипсисѣ, по проведеніи діаметра параллельно одной изъ дополнительныхъ хордъ, сопряженный онаго діаметръ будетъ параллеленъ другой хордѣ.

Отсюда слѣдуетъ весьма легкій способъ, совершенно подобный употребленному нами для эллипсиса, (55) строить сопряженные діаметры иперболы, составляющіе между собою данный уголъ.

О равныхъ сопряженныхъ діаметрахъ.

80) Уравненіе $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$, при предположеніи сопряженныхъ діаметровъ въ иперболѣ равными, то есть когда $a' = b'$, обращается въ $o = a^2 - b^2$, откуда $a = b$, а посему ипербола обращается въ иперболу равностороннюю, то есть что всѣ иперболы равныхъ сопряженныхъ діаметровъ не имѣютъ; и такъ равносторонняя ипербола одна токмо имѣетъ равные сопряженные діаметры, и всѣ сопряженные діаметры оной равны между собою по парно.

Уравненіе касательной, проведенной къ перболѣ чрезъ точку, данную внѣ оной.

81) Предложимъ вопросъ вывести уравненіе касательной къ иперболѣ, проведенной чрезъ данную внѣ оной точку.

Положимъ, что α и $\mathfrak{E}$ представляютъ ординаты данной точки; уравненіе иперболы есть $y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$.

Вообразимъ чрезъ данную точку какую ни есть сѣкущую въ иперболѣ: ея уравненіе будетъ $y - \mathfrak{E} = A(x - \alpha)$, гдѣ количество A должно опредѣлить изъ условія касанія.

Естьли означимъ чрезъ x', y' и x'', y'' координаты точекъ пресѣченія съ иперболою предположенной прямой, то условіе касанія будетъ $x' - x'' = 0$. Найдемъ величины x' и x'' въ величинахъ: a, b, α $\mathfrak{E}$ и A.

Для точки пресѣченія съ иперболою предположенной прямой, имѣемъ два уравненія:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2, \text{ и } y - \mathfrak{E} = A(x - \alpha);$$

изключимъ y изъ сихъ уравненій: получимъ:

$$(\mathfrak{E} + A(x - \alpha))^2 - \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 = 0, \text{ или}$$

$$(A^2 - \frac{b^2}{a^2})x^2 + 2(A\mathfrak{E} - A^2\alpha - \frac{b^2}{a^2})x = 2A\mathfrak{E}\alpha - \mathfrak{E}^2 - A^2\alpha^2, \text{ откуда}$$

$$x = -\frac{a(A\alpha\mathfrak{E} - A^2\alpha - b^2)}{A^2a^2 - b^2} \pm \sqrt{\frac{a^2(2A\mathfrak{E}\alpha - \mathfrak{E}^2 - A^2\alpha^2)}{A^2a^2 - b^2} + \frac{a^2(A\alpha\mathfrak{E} - A^2\alpha - b^2)^2}{(A^2a^2 - b^2)^2}}$$

Двѣ величины x соотвѣтствуютъ величинамъ x' и x''; взявъ разность между сими

двумя величинами x и уравнявъ оную нулю, получимъ условіе касанія, которое и будетъ по сокращеніи,

$(A^2a^2-b^2)(2A\beta\alpha-\beta^2-A^2\alpha^2)+(Aa\beta-A^2a\alpha-\beta^2)^2=0$;

выведя изъ сего уравненія величину для A и поставивъ оную въ уравненіе $y-\beta=A(x-\alpha)$, получимъ уравненіе искомой касательной.

Условное уравненіе касанія весьма сократится, когда предположимъ что данная точка совпадаетъ съ осью абсцисъ x, то есть полагая $\beta=0$; введя сіе условіе въ уравненіе касанія, получимъ:

$-A^2\alpha^2(A^2a^2-b^2)+(A^2a\alpha+b^2)^2=0$, или развернувъ оное и сокративъ:

$$A^2\alpha^2+2A^2a\alpha+b^2=0;\ \text{откуда}$$

$$A=\frac{b}{\pm\sqrt{-2a\alpha-\alpha^2}};\ \text{по сему уравненіе}$$

касательной къ иперболѣ будетъ:

$$y=\pm\frac{b}{\sqrt{-2a\alpha-\alpha^2}}(x-\alpha).$$

Двойный знакъ опредѣляетъ двѣ касательныя удовлетворяющія вопросу и находящіяся одна съ низу, другая съ верху оси абсцисъ x.

Разсмотримъ выраженіе $\frac{b}{\sqrt{-2a\alpha-\alpha^2}}$: оное перемѣняется, отъ положенія α отрицательнымъ, въ $\frac{b}{\sqrt{2a\alpha-\alpha^2}}$, и будетъ дѣйствитель-

ное когда $\alpha^2 < 2a\alpha$, или $\alpha < 2a$; не трудно видѣть, что сіи предѣлы для α показываютъ такую величину оной, чтобы данная точка не находилась внутри вѣтвей иперболы.

Уравненіе касательной къ иперболѣ, проведенной чрезъ данную точку на оной.

82) Условное уравненіе касанія предъ симъ нами выведенное есть $(A^2a^2-b^2)(2A\xi\alpha-\xi^2-A^2\alpha^2)+(A\,a\,\xi - A^2\,a\,\alpha - b^2)^2 = 0$.

Естьли данная точка находится на иперболѣ, то координаты α и ξ сей точки должны удовлетворять уравненію иперболы, почему и получимъ условіе $\xi^2 = \frac{2b^2}{a}\alpha + \frac{b^2}{a^2}\alpha^2$.

Уравненіе касанія по введеніи въ оное сего условія и по сокращеніи обратится въ

$A^2a^2\xi^2 - 2A\xi b^2(a+\alpha) + b^4 + \frac{2b^4}{a}\alpha + \frac{b^4}{a^2}\alpha^2 = 0$, или въ $A^2 - \frac{2A\,b^2}{\xi\,a^2}(a+a) + \frac{b^2}{a^2\xi^2}(a+\alpha)^2 = 0$, или въ $\left(A - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a+\alpha}{\xi}\right)\right)^2 = 0$, откуда $A = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a+\alpha}{\xi}\right)$;

посему уравненіе касательной къ иперболѣ проведенной чрезъ данную точку на оной, будетъ:

$$y - \xi = \frac{b^2}{a^2}\frac{(a+\alpha)}{\xi}(x-\alpha),$$

гдѣ x и y суть координаты какой ни есть точки на касательной, а α и ξ координаты данной точки касанія.

Выраженіе подкасательной въ иперболѣ;

83. Опредѣлимъ точку въ которой касательная встрѣчаетъ ось абсцисъ x, для сего положимъ въ уравненіи касательной (82) $y = 0$; тогда x перемѣнится въ AT, и мы получимъ:

$-\zeta = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a+\alpha}{\zeta}\right)(AT-\alpha)$, откуда

$AT-\alpha = -\frac{a^2\zeta^2}{b^2(a+\alpha)}$, и по вставленіи вмѣсто ζ^2 величины $\frac{b^2(2a\alpha+\alpha^2)}{a^2}$ получимъ:

$AT-\alpha = -\frac{2a\alpha+\alpha^2}{a+\alpha}$; но поелику α означается чрезъ AP, то PT будетъ означена чрезъ $AT-\alpha$, и мы будемъ имѣть:

$PT = -\frac{2a\alpha+\alpha^2}{a+\alpha}$, выраженіе *подкасательной* въ иперболѣ. Когда имѣемъ сію прямую, тогда касательная опредѣлится соединеніемъ точки T съ данною точкою M касанія.

построеніе касательной къ оной помощію иперболы равносторонней. Фиг. 20.

Выраженіе подкасательной выведенное нами не зависитъ отъ величины b, то есть второй оси, изъ чего и слѣдуетъ, что подкасательная также для всѣхъ иперболъ, имѣющихъ ту же первую ось, а посему и для иперболы равносторонней. Сіе свойство представляетъ намъ способъ проводить касательную къ иперболѣ помощію иперболы равносторонней, подобно какъ къ эллипсису помощію круга.

84) Поелику нормальная проходитъ чрезъ точку касанія перпендикулярно къ касательной, которой уравненіе есть:

$y-\beta = \frac{b^2}{a^2}\frac{(a+\alpha)}{\beta}(x-\alpha)$, то уравненіе нормальной MR къ иперболѣ будетъ:

$y-\beta = -\frac{a^2}{b^2}\frac{\beta}{(a+\alpha)}(x-\alpha)$;

Уравненіе нормальной къ иперболѣ; выраженія подномальной, касательной и нормальной.

въ сихъ двухъ уравненіяхъ тангенсы $\frac{b^2}{a^2}\frac{(a+\alpha)}{\beta}$ и $-\frac{a^2}{b^2}\frac{\beta}{(a+\alpha)}$ удовлетворяютъ условному уравненію перпендикулярности двухъ прямыхъ.

По положеніи $y=0$ въ уравненіи нормальной M R, величина абсциссы x перемѣнится въ AR, и мы получимъ:

$$-\beta=-\frac{a^2}{b^2}\frac{\beta}{(a+\alpha)}(AR-\alpha),\ \text{откуда}$$

$AR-\alpha\ (=PR)=\frac{b^2}{a^2}(a+\alpha)$ выраженіе *поднормальной* въ иперболѣ. Чтобы вывести выраженія для касательной M T и нормальной M R, берутся въ помощь треугольники PMT и PMR, изъ коихъ $MT=\sqrt{MP^2+PT^2}$, и $MR=\sqrt{MP^2+PR^2}$; по вставленіи въ сіи величины вмѣсто MP ($=\xi$) выраженія $\frac{b}{a}\sqrt{2a\alpha+\alpha^2}$, и вмѣсто PT и PR найденныхъ нами для оныхъ выраженій (83 и 84) получимъ:

$$MT=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha+\alpha^2)+\left(\frac{2a\alpha+\alpha^2}{a+\alpha}\right)^2},$$

$$MR=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha+\alpha^2)+\frac{b^4}{a^4}(a+\alpha)^2},$$

выраженія *касательной* и *нормальной* въ иперболѣ.

Положеніе касательной относительно къ

85) Чтобы изслѣдовать положеніе касательной M T относительно къ положенію радіусовъ векторовъ F M и F′M проведенныхъ чрезъ точку касанія, найдемъ выраженія тан-

генсовъ угловъ составляемыхъ касательною МТ съ сими прямыми.

радіусамъ векторамъ проходящимъ чрезъ точку касанія. Фиг. 21.

Предположимъ для простоты въ изчисленіи, что начало координатъ находится въ центрѣ иперболы; означивъ абсцису точки М отъ центра О чрезъ α', будетъ $\alpha - \alpha' = -a$, посему тангенсъ угла, составляемаго касательною МТ съ осью абсцисъ *tang.* МТА $\left(= \frac{b^2}{a^2}\frac{(a+\alpha)}{\beta}\right) = \frac{b^2}{a^2}\frac{\alpha'}{\beta}$, гдѣ α и β должны удовлетворять уравненію $a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2$ иперболы, отнесенной къ центру.

Тангенсъ угла составляемаго прямою FM съ осью абсцисъ: $tang.\ \mathrm{M\,F\,T} = -\frac{\beta}{c-\alpha'}$, а тангенсъ угла составляемаго прямою MF′ съ тою же осью $tang.\ \mathrm{M\,F'T} = \frac{\beta}{c+\alpha'}$; притомъ общее выраженіе тангенса угла составляемаго двумя прямыми есть $\frac{a'-a''}{1+a'a''}$, почему и получимъ:

$$tang.\mathrm{FMT} = \frac{-\frac{\beta}{c-\alpha'} - \frac{b^2\alpha'}{a^2\beta}}{1 - \frac{b^2}{a^2}\frac{\alpha'}{(c-\alpha')}} = \frac{-a^2\beta^2 + b^2\alpha'^2 - b^2\alpha' c}{a^2 c\beta - (a^2+b^2)\alpha'\beta},$$

или замѣчая, что въ иперболѣ $a^2 + b^2 = c^2$, и точка, коей координаты α и β, находится на иперболѣ, по сокращеніи получимъ:

$$tang.\ \mathrm{F\,M\,T} = \frac{b^2}{c\beta}.$$

Поступивъ подобнымъ образомъ съ выраженіемъ тангенса угла F′MT, которое есть $\frac{-\frac{e}{c+\alpha'}+\frac{b^2}{a^2}\frac{\alpha'}{\beta}}{1+\frac{b^2}{a^2}\frac{\alpha'}{(c+\alpha')}}$ по сокращеніи получимъ:

$$tang.\ F'MT=\frac{b^2}{c\beta}.$$

Откуда слѣдуетъ, что *tang.*FMT=*tang.* F′MT, то есть что *въ иперболѣ касательная раздѣляетъ пополамъ уголъ, составляемый радіусами векторами, проходящими чрезъ точку касанія.*

Изъ сего видно, что нормальная будетъ также раздѣлять пополамъ уголъ составляемый тѣми же радіусами векторами.

Сіе выведенное нами свойство относительно къ иперболѣ совершенно подобно свойству эллипсиса: разность происходитъ токмо отъ положенія касательной относительно къ симъ двумъ кривымъ.

Геометрическія построенія касательныхъ къ иперболѣ: проведенной чрезъ точку на оной, и проведен-

86) Доказанное нами предъ симъ свойство касательной въ иперболѣ представляетъ весьма легкій способъ построенія оной:

а) Положимъ, что точка M, изъ которой требуется провести касательную дана на иперболѣ.

Отложимъ по радіусу вектору M F′ отъ данной точки M разстояніе MC=MF; прямая MT проведенная перпендикулярно къ прямой

F C будетъ по доказанному касательною къ ной чрезъ
иперболѣ. точку
внѣ оной.
Фиг. 21.

Легко можно доказать, что всѣ точки сей прямой находятся внѣ иперболы, то есть что оныя не находятся ни на иперболѣ, ни внутри оной. Для сего возмемъ гдѣ ни есть на сей прямой точку m, и проведемъ прямыя m F, m F′ и m C; будетъ:

$F'm < F'C + Cm$, или $F'm < 2a + mF$, откуда $F'm - mF < 2a$, то есть что точка m не находится на иперболѣ. Чтобъ доказать, что оная не находится внутри иперболы возмемъ какую ни есть точку m' внутри сей кривой; проведя прямую $m'F'$ будемъ имѣть:

$F'm' - Fm' = F'm' + Mm' - FM$, но $F'm' + Mm' > F'M$, слѣдовательно $F'm' - Fm' > F'M - FM$, или $F'm' - Fm' > 2a$, и такъ для всякой точки находящейся внутри иперболы, разность ея разстояній до фокусовъ болѣе первой оси ($=2a$), а посему точка m касательной M T, для которой, какъ мы видѣли, $F'm - mF < 2a$, не находится и внутри иперболы.

b) Положимъ, что точка Q, изъ коей должно провести касательную дана внѣ иперболы.

Изъ точки F′ радіусомъ F′C равнымъ первой оси ($=2a$) описываютъ дугу CC′; изъ данной точки Q радіусомъ QF описываютъ дугу CFC′: точки взаимнаго пресѣченія C и C′ сихъ дугъ соединяютъ съ фокусомъ F′ прямыми

CF′ и C′F′. Точки встрѣчи M и M′ сихъ прямыхъ съ иперболою будутъ точками касанія къ сей кривой двухъ касательныхъ QM и QM′, проведенныхъ чрезъ данную точку. Ибо, напримѣръ для касательной MQ, по проведеніи прямыхъ CQ, QF и FM имѣемъ: CQ = QF; F′M — FM = 2a, и F′M — CM = 2a, слѣд. FM = CM; прямая MQ общая, а посему треуг. CQM = треуг. QMF, и слѣд. уг. CMQ = уг. FMQ.

Опредѣлить аналитически положеніе касательной, проведенной къ иперболѣ параллельно данной прямой.

87) Положимъ что требуется опредѣлить аналитически положеніе касательной къ иперболѣ, которая бы была параллельна прямой, данной напримѣръ уравненіемъ $y = a'x + b'$. Означимъ координаты искомой точки касанія чрезъ x' и y'; получимъ для тангенса угла составляемаго касательною въ сей точкѣ къ иперболѣ выраженіе:

$$\frac{b^2}{a^2}\,\frac{(a+x')}{y'} \ldots\ldots\ldots (82).$$

Поелику искомая касательная должна быть параллельна данной прямой, то и будемъ имѣть условіе:

$$\frac{b^2}{a^2}\,\frac{(a+x')}{y'} = a';$$

поелику же точка касанія находится на иперболѣ, то и получимъ условіе:

$$y'^2 = \frac{2b^2}{a}\,x' + \frac{b^2}{a^2}\,x'^2.$$

Изъ сихъ двухъ условій вопроса опредѣлимъ x' и y'; найденныя величины для оныхъ будутъ координатами точки касанія, изъ которой проведенная прямая параллельно данной прямой, будетъ искомая касательная; уравненіе оной будетъ:

$y - y' = a'(x - x')$, гдѣ x' и y' предположены имѣющими величины, опредѣленныя изъ показанныхъ условій вопроса.

88) Уравненіе $a'^2u^2 - b'^2t^2 = -a'^2b'^2$ иперболы отнесенной къ ея центру и сопряженнымъ діаметрамъ, даетъ:

$$u = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{t^2 - a'^2};$$

Проведеніе касательныхъ къ иперболѣ помощію сопряженныхъ діаметровъ.

изъ сего выраженія видно, что діаметръ t раздѣляетъ по поламъ хорды параллельныя діаметру u, и притомъ когда $t = \pm a'$, получимъ $u = 0$, что и показываетъ что прямыя проведенныя изъ концевъ діаметра t параллельно діаметру u имѣютъ по одной только общей точкѣ съ иперболою и именно по концу діаметра t; то есть что прямыя проведенныя изъ концевъ діаметра пресѣкающаго иперболу параллельно сопряженному онаго, касательны къ иперболѣ. Оси суть частный случай сопряженныхъ діаметровъ (75), почему сіе свойство существуетъ и для осей.

Основываясь на семъ свойствѣ сопряженныхъ діаметровъ, можно провести касательную къ иперболѣ изъ данной точки на оной.

Для сего чрезъ данную точку и центръ проводятъ діаметръ; посредствомъ дополнительныхъ хордъ строятъ сопряженный оному: прямая проведенная чрезъ данную точку на иперболѣ параллельно сему послѣднему, будетъ искомая касательная.

Чтобы провести параллельно данной прямой касательную къ иперболѣ, проводятъ систему дополнительныхъ хордъ, изъ коихъ бы одна была параллельна данной прямой; по симъ хордамъ строятъ сопряженные діаметры, изъ коихъ одинъ будетъ параллеленъ данной прямой; изъ концевъ сопряженнаго сему діаметра проводятъ прямыя параллельныя данной прямой: сіи прямыя будутъ искомыя касательныя. Въ случаѣ когда діаметръ сопряженный параллельному данной прямой не пресѣчетъ иперболы, рѣшеніе вопроса невозможно.

Въ сихъ построеніяхъ мы предполагали, что дана система осей; въ случаѣ когда дано очертаніе иперболы сія система легко опредѣлена быть можетъ.

Для нахожденія центра проводятъ два какіе ни есть пресѣкающіе иперболу діаметра, основываясь на томъ, что всякой діаметръ раздѣляетъ пополамъ систему какихъ ни есть параллельныхъ между собою хордъ: точка пресѣченія сихъ двухъ діаметровъ будетъ центромъ. Изъ центра какимъ ни есть разстояніемъ GO до точки на иперболѣ описываютъ

дугу G G′; точки пресѣченія G и G′ съ иперболою сей дуги соединяютъ прямою G G′, которая и будетъ параллельна второй оси иперболы. Прямая O P опущенная изъ центра O перпендикулярно къ оной, будетъ первою осью иперболы, коей длина A A′ опредѣлится точками пресѣченія ея съ иперболою. Чтобы опредѣлить длину второй полуоси OB, берутъ гдѣ ни есть точку на данной очертаніемъ иперболѣ; координаты сей точки будутъ извѣстны, притомъ $\frac{AA'}{2}$ или a извѣстно, слѣдственно въ уравненіи $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ останется неизвѣстнымъ токмо b, которое количество изъ онаго и опредѣлится. Очевидно, что A A′ раздѣляетъ хорды къ оной перпендикулярныя пополамъ, изъ чего и слѣдуетъ, что опредѣленная нами система, есть система осей.

89) *Асимптотами* какой ни есть кривой линіи называются прямыя, къ которымъ сія кривая линія по мѣрѣ разпространенія ея хода можетъ приближиться на разстояніе, меньшее всякаго даннаго, но которыхъ оная никогда встрѣтить не можетъ. Что называется, асимптотами вообще; уравненія асимптотъ въ иперболѣ.

Въ иперболѣ уравненія асимптотъ будутъ: $y = \frac{b}{a}x$, и $y = -\frac{b}{a}x$; чтобы показать, что прямыя выраженныя сими уравненіями, имѣютъ относительно къ вѣтвямъ иперболы свойство, изложенное въ опредѣленіи асимптотъ, изслѣдуемъ разность между ординатою одной изъ

сихъ прямыхъ, напримѣръ $y = \frac{b}{a} x$, и ординатою иперболы, соотвѣтствующими той же величинѣ абсцисы x.

Фиг. 22. Положимъ, что прямыя O S и O S′ составляютъ съ осью абсцисъ углы S O A и S′ O A, коихъ тангенсы равны $\frac{b}{a}$ и $-\frac{b}{a}$: уравненія сихъ прямыхъ будутъ $y = \frac{b}{a} x$ и $y = -\frac{b}{a} x$.

Возмемъ какую ни есть абсцису O P; соотвѣтствующія оной: ординату иперболы P M означимъ чрезъ y, а ординату прямой O S чрезъ y'; получимъ:

$$y' = \frac{b}{a} x \text{ и}$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \text{ откуда}$$

$$y' - y (= M m) = \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2}), \text{ но по-}$$

елику имѣемъ:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} = x - \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} - \text{ и т: д:}$$

то по вставленіи вмѣсто $\sqrt{x^2 - a^2}$ въ выраженіе $y' - y$ найденнаго ряда, получимъ:

$$y' - y (= M m) = \frac{b}{a} (x - x + \frac{a^2}{x} + \frac{a^4}{8x^3} + \text{ и т: д:})$$

или $y' - y (= M m) = \frac{ab}{2x} + \frac{a^3 b}{8x^3} + \text{ и т. д.}$

Сіе выраженіе показываетъ, что по мѣрѣ увеличенія абсцисы x величина разности $y' - y$ будетъ уменьшаться, и можетъ быть сдѣлана

меньше всякаго даннаго количества, и притомъ какъ бы абсциса ни возрасла, разность сія въ нуль обратиться не можетъ; то есть что по мѣрѣ разпространенія вѣтви AX иперболы, оная болѣе и болѣе приближается къ прямой O S и можетъ приближиться къ оной на разстояніе меньшее всякаго даннаго, но никогда сей прямой не встрѣтитъ.

Подобное разсужденіе приложенное къ прямой O S′ и вѣтви A X′ покажетъ намъ, что прямая O S′ есть асимптота вѣтви A X′.

Поелику мы показали, что въ эллипсисѣ (56) равные сопряженные діаметры составляютъ съ осью абсцисъ углы, коихъ тангенсы суть $\frac{b}{a}$ и $-\frac{b}{a}$, то явно, что по построеніи эллипсиса и иперболы по тѣмъ же осямъ, равные сопряженные діаметры эллипсиса будутъ асимптотами иперболы.

Когда ипербола равносторонняя, то есть когда $b = a$, каждый изъ тангенсовъ угловъ составляемыхъ ея асимптотами съ осью абсцисъ будетъ равенъ единицѣ: то есть что асимптоты иперболы равносторонней между собою перпендикулярны.

90) Тангенсъ угла составляемаго асимптотою въ иперболѣ съ ея осью имѣетъ весьма примѣчательное свойство относительно къ тангенсу угла, составляемаго какою ни есть касательною къ иперболѣ съ тою же осью; Положеніе касательныхъ въ иперболѣ относительно къ ея

асимптотамъ.

чтобы изслѣдовать сіе свойство примемъ въ разсужденіе выраженіе тангенса угла составляемаго какою ниесть касательною къ иперболѣ съ осью абсцисъ.

Выраженіе сего тангенса (82) есть $\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a+\alpha}{\varepsilon}\right)$ гдѣ α и ε суть координаты данной точки касанія. Написавъ въ семъ выраженіи вмѣсто α и ε неопредѣленныя x и y получимъ въ иперболѣ, коей уравненіе есть $y=\frac{b}{a}\sqrt{2ax+x^2}$, общее выраженіе тангенса:

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{(a+x)}{y}=\frac{b^2}{a^2}\frac{(a+x)}{\frac{b}{a}\sqrt{2ax+x^2}}=\frac{b}{a}\frac{(a+x)}{\sqrt{2ax+x^2}}.$$

Сіе выраженіе по раздѣленіи числителя и знаменателя онаго на x, приметъ видъ

$$\frac{b}{a}\frac{\left(\frac{a}{x}+1\right)}{\sqrt{\frac{2a}{x}+1}}.$$

Откуда видно, что чѣмъ величина x будетъ болѣе, тѣмъ величина сего тангенса будетъ болѣе приближаться къ $\frac{b}{a}$, такъ, что перейдя къ предѣлу, то есть положивъ $x=\frac{1}{0}$, получаемъ $\frac{b}{a}$, тангенсъ угла составляемаго асимптотою иперболы съ ея осью; то есть что, по мѣрѣ удаленія точки данной на иперболѣ отъ вершины, касательная къ оной будетъ болѣе и

болѣе приближаться къ положенію асимптоты, но никогда сего положенія не достигнетъ; или, что тангенсъ угла составляемаго асимптотою иперболы съ осью абсцисъ есть предѣлъ тангенса угла, составляемаго вообще касательною съ сею же осью.

Въ равносторонней иперболѣ, коей уравненіе есть: $y^2 - x^2 = -a^2$ ..... (65), общее выраженіе тангенса угла составляемаго касательною къ оной съ осью абсцисъ, будетъ $\frac{a+x}{y}$, или $\frac{a+x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, или $\frac{\frac{a}{x}+1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}$; откуда видно, что предѣлъ сего тангенса будетъ единица, то есть тангенсъ угла, составляемаго асимптотою равносторонней иперболы съ осью абсцисъ.

Уравненіе иперболы отнесенной къ ея асимптотамъ.

91) Естли примемъ асимптоты иперболы за оси координатъ, то уравненіе оной, отнесенной къ симъ прямымъ будетъ имѣть весьма простый видъ.

Для выведенія сего уравненія возмемъ уравненіе иперболы отнесенной къ ея центру и осямъ, которое есть $a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$. Перемѣнимъ прямоугольныя координаты въ косоугольныя; для сего имѣемъ формулы (39):

$$x = t \cos. \varphi + u \sin. \psi;$$
$$y = t \sin. \varphi + u \cos. \psi;$$

по вставленіи уравненіе иперболы примет ъ видъ

$$(a^2 sin.^2\varphi - b^2 cos.^2\varphi)t^2 + 2(a^2 sin.\varphi cos.\psi - b^2 sin.\psi cos.\varphi)$$
$$tu + (a^2 cos.^2\psi - b^2 sin.^2\psi)u^2 = -a^2 b^2.$$

Замѣтимъ, что здѣсь φ означаетъ уголъ составляемый осью t съ осью x, а ψ уголъ составляемый осью u съ осью y; означимъ чрезъ q уголъ составляемый осью u съ осью x; получимъ $\psi + q = 90°$, слѣд: $sin.\psi = cos.q$ и $cos.\psi = sin.q$; послѣ чего уравненіе обратится въ

$$(a^2 sin.^2\varphi - b^2 cos.^2\varphi)t^2 + 2(a^2 sin.q sin.\varphi - b^2 cos.q cos.\varphi)$$
$$tu + (a^2 sin.^2 q - b^2 cos.^2 q)u^2 = -a^2 b^2.$$

Когда новыя оси координатъ t и u суть асимптоты, имѣемъ условія: $tang.\, q = \frac{b}{a}$, и $tang.\,\varphi = -\frac{b}{a}$; почему уравненіе обратится въ

$$-\frac{4\,a^2\,b^2}{a^2+b^2}\,t\,u = -a^2\,b^2, \text{ или}$$

$$t\,u = \frac{a^2+b^2}{4},$$

уравненіе иперболы отнесенной къ ея асимптотамъ.

Когда ипербола равносторонняя, тогда уравненіе относительно къ ея асимптотамъ будетъ: $t\,u = \frac{1}{2}\,a^2$.

Уравненіе иперболы отнесенной къ ея асимптотамъ показываетъ также свойство сей кривой относительно къ онымъ; для показанія сего придадимъ уравненію слѣдующіе виды:

$$u = \frac{a^2 + b^2}{4t}, \text{ и}$$

$$t = \frac{a^2 + b^2}{4u}.$$

Изъ перваго выраженія мы видимъ, что чѣмъ t будетъ болѣе, тѣмъ u менѣе, и что какъ бы величина для t ни возрасла, величина для u сдѣлаться нулемъ не можетъ; то есть что вѣтвь иперболы по мѣрѣ разпространенія ея хода болѣе и болѣе приближается къ оси координатъ u, но никогда сей оси не встрѣтитъ. Другое выраженіе изслѣдованное подобнымъ образомъ, покажетъ тоже свойство другой вѣтви иперболы относительно къ оси координатъ t.

Что называется степенью иперболы; объ иперболахъ сопряженныхъ.

92) Проведя изъ конца A оси пресѣкающей иперболу прямыя AD и Ad параллельныя асимптотамъ до пресѣченія съ оными, по причинѣ что сіи проведенныя прямыя суть координаты точки A на иперболѣ отнесенной къ асимптотамъ, будемъ имѣть:

$AD \cdot Ad = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$, или по причинѣ что ось раздѣляетъ уголъ составленный асимптотами по полам, почему $AD = Ad$, получимъ:

$\overline{AD}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$; а посему отнеся какую ни есть точку M иперболы прямыми MQ и OQ къ асимптотамъ получимъ вообще: $QO \times QM = \overline{AD}^2$.

Въ случаѣ иперболы равносторонней, уголъ между ея асимптотами будетъ прямой, почему ромбъ D*d* обратится въ квадратъ.

Квадратъ $\overline{AD}^2$ равняющійся одной четверти суммы квадратовъ изъ полуосей иперболы, называется *степенью* оной.

Кромѣ иперболы XAX′, YAY′ прямыя OS и OS′ заключаютъ еще между собою другую иперболу TUZ, T′U′Z′, которой степень будетъ таже какъ и иперболы первой, почему ея уравненіе относительно къ асимптотамъ тоже: разность состоитъ токмо въ углѣ координатъ; сіи иперболы имѣютъ положеніе, по которому пресѣкающая ось первой иперболы служитъ второю осью другой, и обратно. Основываясь на семъ взаимномъ положеніи сихъ двухъ иперболъ, называютъ ихъ *иперболами сопряженными.*

Свойство асимптотъ въ иперболѣ, изъ котораго слѣдуетъ построеніе иперболы по точкамъ. Фиг. 23.

93) Взявъ какую ни есть абсцису OP(=x), соотвѣтствующія оной ординаты иперболы будутъ PM и PM′, а ординаты асимптотъ P*m* и P*m*′; явно что часть M*m* = M′*m*′: мы покажемъ, что сіе свойство имѣетъ всякая линія SS′ пресѣкающая какъ ни есть вѣтви иперболы и асимптоты, то есть что и для сей прямой будемъ имѣть MS = S′Q′.

Для сего замѣтимъ, что $Pm\,(=Pm') = \frac{bx}{a}$, и $PM\,(=PM') = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$; почему по-

лучимъ $Mm(=Pm-PM)=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})$,

и $Mm'(=PM+Pm')=\frac{b}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2})$;

перемноживъ сіи выраженія будемъ имѣть:

$$Mm \cdot Mm' = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - x^2 + a^2) = b^2,$$

то есть что произведеніе отрѣзковъ всякой прямой перпендикулярной къ оси иперболы, отъ точки взятой на кривой до обѣихъ асимптотъ постоянно, и именно равно квадрату непересѣкающей полуоси.

Проведемъ чрезъ точку пересѣченія Q', прямой SS' съ другою вѣтвію иперболы, прямую LL' перпендикулярную къ оси AQ, и пересѣкающую асимптоты въ точкахъ L и L', а другую вѣтвь иперболы въ точкѣ Q; по доказанному получимъ: $Q'L \times Q'L' = b^2$.

Треуг. $S'Q'L' \sim$ треуг. $S'Mm'$, почему будемъ имѣть:

$$S'Q' : S'M = Q'L' : Mm';$$

Треуг. $SMm \sim$ треуг. $SQ'L$, почему и получимъ:

$$Q'S : SM = Q'L : Mm.$$

Перемноживъ сіи двѣ пропорціи почленно и замѣтивъ что $Q'L \times Q'L' = b^2 = Mm \cdot Mm'$, получимъ:

$$Q'S \times S'Q' = S'M \times SM, \text{ или}$$
$$(Q'M + MS)\,S'Q' = (S'Q' + Q'M)\,SM, \text{ откуда}$$
$$S'Q' = SM.$$

Сіе свойство въ иперболѣ относительно къ вѣтвямъ ея и асимптотамъ, представляетъ весьма простый способъ построенія иперболы по точкамъ, когда дана одна изъ оныхъ M и положеніе асимптотъ. Для сего чрезъ сію точку M проводятъ какъ ни есть линію SS', и отъ другой асимптоты OS' отлагаютъ по сей прямой часть $S'Q'$ равную части MS, на сей прямой между данною точкою M и первою асимптотою заключающейся. Сіе строеніе повторяютъ число разъ, равное числу точекъ потребныхъ для очерченія иперболы.

Когда совершенно дана система осей асимптоты легко опредѣляются, ибо тангенсы ихъ угловъ съ осью выражены въ величинѣ осей; почему въ семъ случаѣ и можно употребить сіе строеніе.

Полярное уравненіе иперболы.

94) Отношеніе между радіусомъ векторомъ z и абсцисою x какой ни есть точки на иперболѣ (66) есть:

$$z = \frac{cx - a^2}{a} = \frac{cx}{a} - a.$$

Фиг. 18.

Сіе отношеніе можетъ быть употреблено, подобно какъ въ эллипсисѣ (65), къ построенію иперболы по точкамъ, а посему можетъ быть названо уравненіемъ сей кривой. По введеніи въ оное вмѣсто абсцисы $OP (= x)$ отъ центра, абсцисы $PF (=$ напр. $x')$ отъ фокуса, то есть по положеніи въ ономъ $x = c - x'$, получимъ:

$z = \frac{c^2 - a^2 - cx'}{a}$, или $z = \frac{b^2 - cx'}{a}$, замѣчая что въ иперболѣ $c^2 - a^2 = b^2$.

Въ сіе уравненіе обыкновенно вводятъ уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ съ осью: сей уголъ будетъ измѣняться вмѣстѣ съ длиною z радіуса вектора. И такъ положимъ что уг. $NFM = \Phi$, получимъ $x' = -z\cos.\Phi$ изъ треуг. PMF; по вставленіи сей величины x' въ уравненіе, будемъ имѣть:

$z = \frac{b^2 + cz\cos.\Phi}{a}$, откуда $z = \frac{b^2}{a - c\cos.\Phi}$,

полярное уравненіе иперболы.

Сіе уравненіе по введеніи въ оное параметра, то есть положивъ $b^2 = \frac{ap}{2}$, приметъ видъ:

$$z = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \frac{c}{a}\cos.\Phi};$$

или положивъ $\frac{c}{a} = e$, что даетъ $p\left(= 2a\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)\right) = 2a(c^2 - 1)$, обратится въ

$$z = \frac{a(e^2 - 1)}{1 - e\cos.\Phi}.$$

О ПАРАБОЛѢ.

Уравненіе параболы отнесенной къ ея вершинѣ и оси.

95) *Параболою* называется кривая линія, въ которой разстоянія всякой ея точки до данной прямой и данной точки равны между собою. И такъ для выведенія уравненія параболы предложимъ вопросъ вывести уравненіе кривой, имѣющей сіе свойство.

Фиг. 24.

Для сего пусть AB и F представляютъ намъ данную прямую и данную точку; опустимъ изъ точки F перпендикуляръ AF на данную прямую; явно что по раздѣленіи прямой AF въ точкѣ O пополамъ, точка сія будетъ принадлежать искомой кривой, ибо оная удовлетворяетъ свойству параболы. Примемъ сію точку O за начало координатъ, а прямыя: OF и перпендикулярную къ оной OY за ось абсциcъ x и ось ординатъ y; тогда координаты OP и MP точки M предположенной на параболѣ означутся чрезъ x и y. Замѣтимъ, что поелику положеніе точки F относительно къ прямой AB дано, то разстояніе AF будетъ извѣстно, которое посему и означимъ, напримѣръ чрезъ $2c'$; получимъ $AO = OF = c'$.

По свойству кривой будемъ имѣть: $MQ = MF\ (= z)$, или замѣчая что $MQ\ (= AO + OP) = c' + x$, и $MF\ (= \sqrt{MP^2 + PF^2}) = \sqrt{y^2 + (c' - x)^2}$ получимъ:

$$z = c' + x = \sqrt{y^2 + (c' - x)^2}, \text{ или}$$

$$c'^2 + 2c'x + x^2 = y^2 + c'^2 - 2c'x + x^2, \text{ откуда}$$

$y^2 = 4c'x$, уравненіе *параболы*, ибо озна-

чаетъ отношеніе между x и y, координатами какой ни есть точки M, предположенной на оной.

Замѣтимъ, что ось абсцисъ x называется *осью* параболы; точка O, начало координатъ, *вершиною*; точка F *фокусомъ*, а прямая AB *линіею направленія*. Въ семъ уравненіи, какъ мы видѣли, парабола отнесена къ системѣ координатъ прямоугольныхъ.

96) Изслѣдуемъ теперь (9) свойства кривой, которой уравненіе предъ симъ нами выведено; для сего извлечемъ изъ онаго величину ординаты y въ величинѣ абсцисы x; получимъ: Изслѣдованіе параболы.

$$y = \pm\sqrt{4cx}.$$

Положивъ $x = o$, получимъ $y = o$, откуда слѣдуетъ что кривая линія проходитъ чрезъ начало O координатъ.

Величина ординаты y будетъ токмо тогда дѣйствительная когда абсциса x имѣетъ величину положительную, изъ чего и слѣдуетъ что кривая въ сторонѣ абсцисъ отрицательныхъ, то есть за осью ординатъ y отъ вершины O къ сторонѣ линіи направленія, точекъ имѣть не будетъ.

Чѣмъ x будетъ болѣе, тѣмъ y будетъ болѣе, такъ что по мѣрѣ увеличенія абсцисы x до безконечности, и ордината y равномѣрно увеличиваться будетъ; притомъ двойный знакъ выраженія y показываетъ, что для всякой ве-

личины абсцисы x будемъ имѣть двѣ равныя, но съ противными знаками величины y.

Сблизивъ всѣ сіи разсужденія заключимъ, что парабола есть кривая несомкнутая, простирающаяся въ безконечность, и симетрически разположенная относительно къ оси абсцисъ x, что и опредѣляетъ видъ ея XOX′.

Построенія параболы: по точкамъ и по непрерывному движенію. Фиг. 25.

97) Выведенныя нами свойства параболы представляютъ намъ способъ построенія оной по точкамъ.

Замѣчая, что въ параболѣ величина ординаты y есть $\sqrt{4cx}$, усматриваемъ, что придавъ какую ни есть величину абсцисѣ x, соотвѣтствующая оной величина ординаты y будетъ средняя пропорціональная прямая между длиною $4c$, удвоеннымъ разстояніемъ ея фокуса до линіи направленія, и приданною величиною абсцисѣ. Почему отложивъ разстояніе A F′ равное $4c$, и приложивъ къ оному величину F′Q, приданную абсцисѣ x, опишемъ на суммѣ A Q сихъ прямыхъ полукругъ; прямая F′L возставленная изъ точки F′ перпендикулярно къ A Q представитъ намъ длину ординаты параболы. Отложивъ сію длину L F′ по прямой PM, возставленной перпендикулярно къ оси абсцисъ AQ изъ конца абсцисы OP(=F′Q), получимъ точку находящуюся на параболѣ. Повторивъ сіе строеніе опредѣлимъ точку M′, и такъ далѣе.

Нижняя вѣтвь OX′ параболы построится отложеніемъ, по продолженію внизъ ординатъ верхней части, соотвѣтствующихъ онымъ величинамъ.

Можно также строить параболу по точкамъ, основываясь на ея свойствѣ, относительно къ фокусу и линіи направленія. Для сего откладываютъ абсцисы AP, AP′ и т. д. и изъ фокуса F засѣкаютъ длинами FM(=AP), FM′(=AP′) и т. д. на ординатахъ соотвѣтствующихъ симъ абсцисамъ дуги, которыхъ точки пресѣченія M, M′ и т. д. съ сими ординатами PM, P′M′ и т. д. будутъ принадлежать параболѣ, ибо получимъ: FM(=AP)=MS, FM′(=AP′)=M′S′ и т. д.; сей способъ можетъ быть употребленъ предпочтительнѣе перваго.

Для описанія параболы непрерывнымъ движеніемъ, по линіи направленія AB прилагается Фиг. 26.
линейка, къ которой однимъ изъ его катетовъ *bq* прикладывается прямоугольникъ *bql*. Длина нити *l*F прикрѣпленной къ фокусу F и концу *l* катета *ql*, берется равною длинѣ сего катета *ql*; явно что когда прямоугольникъ подвинутъ такъ по линейкѣ, что нить *l*F натянута, то точка *l* будетъ принадлежать параболѣ, ибо *ql*=*l*F. Для описанія параболы подвигаютъ прямоугольникъ по линейкѣ, натягивая нить *l*F колышкомъ O′ такъ, чтобы часть *l*′O′ оной лежала по направленію каче-

та $l'q'$ прямоугольника; тогда конецъ колышка O′ опредѣляетъ точки для параболы, ибо $lF = lq$, посему $l'O' + O'F = l'O' + O'q'$, или $O'F = O'q'$.

Свойство параметра въ параболѣ.

98) По положеніи въ уравненіи, $y^2 = 4c'x$, параболы, $4c' = p$, оное уравненіе приметъ видъ $y^2 = px$. (*)

Условная величина $p = 4c'$ называется *параметромъ* параболы; почему и заключимъ что параметръ въ параболѣ равенъ учетверенному разстоянію отъ вершины до фокуса.

Замѣнивъ въ уравненіи $y^2 = 4c'x$ абсцису x величиною c', получимъ: $y^2 = 4c'^2$, гдѣ y есть уже ордината проходящая чрезъ фокусъ; или будетъ $4y^2 = 16c'^2$, или $4y^2 = p^2$, откуда $p = 2y$, то есть *въ параболѣ параметръ равенъ удвоенной ординатѣ проходящей чрезъ фокусъ.* Сіе свойство параметра, какъ мы видѣли, существуетъ также для эллипсиса и иперболы.

(*) Уравненіе $y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2$ эллипсиса отнесеннаго къ вершинѣ, представлять можетъ иперболу и параболу; оное будетъ принадлежать иперболѣ когда a отрицательное и $c > a$, а параболѣ когда a безконечное: въ семъ случаѣ величина для параметра въ эллипсисѣ $p\left(= 4\frac{(a^2 - c^2)}{2a} = 4\left(\frac{2ac' + c'^2}{2a}\right)\right) = 4c' + \frac{c'^2}{2a}$, обращается въ $p = 4c'$, гдѣ c' есть разстояніе отъ вершины до фокуса.

99) Уравненіе $y^2 = px$ параболы, можетъ принять видъ $\frac{y^2}{x} = p$, то есть что въ параболѣ вообще отношеніе между квадратомъ ординаты, и соотвѣтствующею оной абсцисою постоянно; изъ чего и слѣдуетъ, что предположивъ гдѣ ни есть на параболѣ двѣ точки, коихъ координаты означивъ чрезъ X и Y, и x' и y', получимъ:

Квадраты ординатъ относятся какъ абсцисы.

$$\frac{X^2}{Y} = p, \text{ и } \frac{y'^2}{x'} = p, \text{ откуда}$$

$Y^2 : y'^2 = X : x'$, то есть *въ параболѣ квадраты ординатъ относятся между собою какъ соотвѣтствующія онымъ абсцисы.*

100) Займемся теперь изысканіемъ не существуетъ ли системы косоугольныхъ координатъ, къ которой бы отнесенная парабола выражалась уравненіемъ имѣющимъ видъ подобный уравненію $y^2 = 4c'x$ параболы, отнесенной къ ея оси.

Уравненіе параболы отнесенной къ ея діаметрамъ.

Для сего перемѣнимъ прямоугольныя координаты въ косоугольныя, и притомъ начало координатъ, къ чему послужатъ намъ формулы: (39)

$$x = u \sin. \psi + t \cos. \varphi + \alpha,$$
$$y = t \sin. \varphi + u \cos. \psi + \beta,$$

въ которыхъ φ и ψ означаютъ углы соста-

вляемые осью координатъ t съ осью x, и осью координатъ u съ осью y. ( )

По вставленіи сихъ величинъ для x и y въ уравненіе параболы, получимъ:

$$t^2 sin.^2\varphi + 2tusin.\varphi cos.\psi + u^2 cos.^2\psi + 2(\mathfrak{C} sin.\varphi - 2c' cos.\varphi)t + 2(\mathfrak{C} cos.\psi - 2c' sin.\psi)u + \mathfrak{C}^2 - 4c'\alpha = 0.$$

Чтобы сіе уравненіе имѣло видъ уравненія $y^2 = 4c'x$, получимъ условія:

$$sin.^2\varphi = 0,\quad sin.\varphi cos.\psi = 0,\quad \mathfrak{C} cos.\psi - 2c' sin.\psi = 0,$$
$$\mathfrak{C}^2 - 4c'\alpha = 0;$$

по введеніи сихъ условій въ уравненіе между t и u, оное обратится въ

$$u^2 = \frac{4c'}{cos.^2\psi}\, t.$$

Поелику въ семъ уравненіи ось координатъ t раздѣляетъ хорды параллельныя u по поламъ, ибо $u = \pm\sqrt{\frac{4c'}{cos.^2\psi}}\, t$, то оная ось коор-

---

(*) Естьли бы перемѣнили одно токмо направленіе осей координатъ, какъ въ эллипсисѣ и гиперболѣ, тогда по вставленіи величинъ для x и y въ уравненіе $y^2 = 4c'x$ параболы, получили бы:

$$t^2 sin.^2\varphi + 2tusin.\varphi cos.\psi + u^2 cos.^2\psi = 4c' usin.\psi + 4c' tcos.\varphi.$$

Чтобы сіе уравненіе имѣло видъ $y^2 = 4c'x$, должно чтобы члены, въ которыхъ находится t^2, tu, и u не входили въ оное, а по сему получимъ условія:

$$sin.^2\varphi = 0,\quad sin.\varphi cos.\psi = 0,\quad 4c' sin.\psi = 0,$$

что дастъ $sin.\varphi = 0$, и $sin.\psi = 0$, а посему будетъ $cos.\varphi = 1$, $cos.\psi = 1$ и мы получаемъ опять прежнія оси координатъ x и y.

динатъ и можетъ быть названа *діаметромъ* параболы.

Первое изъ условныхъ уравненій даетъ намъ $sin.\Phi = 0$, то есть что ось координатъ t параллельна оси координатъ x, или что въ параболѣ діаметры параллельны оси.

Четвертое уравненіе $\mathfrak{C}^2 = 4c'\alpha$ показываетъ, что координаты α и $\mathfrak{C}$ новаго начала удовлетворяютъ уравненію $y^2 = 4c'x$ параболы, изъ чего и слѣдуетъ, что сіе начало координатъ есть одна изъ точекъ параболы.

Всѣ же четыре уравненія показываютъ, по причинѣ что первое и второе удовлетворяются величиною $sin.\Phi\,(=0)$, что для опредѣленія угла ψ и координатъ α и $\mathfrak{C}$ имѣемъ токмо два послѣднія уравненія, то есть что одно изъ сихъ количествъ остается произвольнымъ, а посему можетъ принять безчисленное множество величинъ; слѣдовательно существуетъ безчисленное множество системъ координатъ, при которыхъ уравненіе параболы имѣетъ видъ уравненія $y^2 = 4c'x$ оной, отнесенной къ оси, и системъ координатъ прямоугольныхъ.

Означивъ $\frac{4c'}{cos.^2\psi}$ чрезъ p' получимъ уравненіе параболы отнесенной къ ея вершинѣ и діаметрамъ слѣдующаго вида: $u^2 = p't$.

101) Чтобы вывести уравненіе касательной къ параболѣ, проведенной чрезъ данную Уравненіе касательной про-

веденной къ параболѣ чрезъ точку данную внѣ оной.

точку внѣ оной, положимъ что α и β представляютъ намъ координаты данной точки; уравненіе параболы есть $y^2 = 4c'x$.

Уравненіе сѣкущей проходящей чрезъ данную точку будетъ:

$$y - \beta = A(x - \alpha),$$ въ которомъ A должно быть опредѣлено изъ условія вопроса.

Условіе вопроса есть условіе касанія, которое по означеніи абсциссъ точекъ пресѣченія предположенной прямой съ параболою чрезъ x' и x'', выразится уравненіемъ $x' - x'' = 0$; остается опредѣлить x' и x'' въ величинахъ: c', α, β, и A.

Чтобы опредѣлить x' и x'' изключимъ y изъ двухъ уравненій:

$$y^2 = 4c'x, \text{ и } y - \beta = A(x - \alpha);$$

по семъ изключеніи абсцисса x будетъ абсциссою точки пресѣченія предположенной прямой съ параболою, и мы получимъ:

$$\beta^2 + 2A\beta(x - \alpha) + A^2(x - \alpha)^2 = 4c'x, \text{ или}$$

$$x^2 + \frac{2(A\beta - \alpha A^2 - 2c')}{A^2}x = \frac{2A\beta\alpha - \alpha^2 - \beta^2}{A^2}, \text{ откуда}$$

$$x = -\frac{A\beta - \alpha A^2 - 2c'}{A^2} \pm \sqrt{\frac{2A\beta\alpha - \alpha^2 - \beta^2}{A^2} + \frac{(A\beta - \alpha A^2 - 2c')^2}{A4}}.$$

Двѣ величины x принадлежатъ: одна x' другая x'', почему взявъ разность между сими двумя величинами, и уравнявъ оную нулю, получимъ условіе касанія, которое по сокращеніи будетъ:

$$A^2(2A\beta\alpha - \alpha^2 - \beta^2) + (A\beta - \alpha A^2 - 2c')^2 = 0.$$

Откуда опредѣливъ A и поставивъ величину онаго въ уравненіе $y - \mathfrak{C} = A(x - \alpha)$ получимъ уравненіе искомой касательной.

Условіе касанія весьма сократится отъ предположенія, что данная точка совпадаетъ съ осью абсцисъ, что выражается чрезъ $\mathfrak{C} = o$; введя сіе условіе въ уравненіе касанія, получимъ:

$$-A^2\alpha^2 + \alpha^2A^2 + 4\alpha c'A^2 + 4c'^2 = 0, \text{ или}$$

$$\alpha A^2 + c' = 0, \text{ откуда}$$

$$A = \pm\sqrt{\frac{c'}{-\alpha}}.$$

По сему уравненіе касательной къ параболѣ въ семъ случаѣ будетъ:

$$y = \pm\sqrt{\frac{c'}{-\alpha}}\,(x - \alpha).$$

Двойный знакъ выраженія для тангенса показываетъ, что можно провести двѣ касательныя къ параболѣ: одну съ верьху, другую съ низу оси абсцисъ.

Чтобы выраженіе тангенса было дѣйствительное, должно чтобы абсциса α данной точки была взята отрицательно: легко можно видѣть что сіе предположеніе соотвѣтствуетъ тому случаю, когда данная точка не находится внутри параболы.

Уравненіе касательной къ параболѣ, проведенной чрезъ точку данную на оной.

102) Въ случаѣ когда точка дана на параболѣ, координаты сей точки α и ζ должны удовлетворять уравненію параболы, почему и получимъ условіе: $\zeta^2 = 4c'\alpha$. По введеніи сего условія въ уравненіе касанія (101), которое по сокращеніи онаго принимаетъ видъ $4c'^2 - 4c'A\zeta + 4c'\alpha A^2 = 0$, или $c' - A\zeta + \alpha A^2 = 0$, получимъ:

$$c' - A\beta + \frac{A^2\beta^2}{4c'} = 0, \text{ или } A^2\zeta^2 - 4A\zeta c' + 4c'^2 = 0,$$

или $(A\zeta - 2c')^2 = 0$, откуда $A = \frac{2c'}{\beta}$, а посему уравненіе касательной къ параболѣ въ семъ случаѣ будетъ:

$$y - \beta = \frac{2c'}{\beta}(x - \alpha),$$ гдѣ x и y означаютъ координаты какой ни есть точки на касательной, а α и ζ координаты данной точки касанія.

Выраженіе подкасательной въ параболѣ. Фиг. 27.

103) Опредѣлимъ точку, въ которой касательная встрѣчаетъ ось абсцисъ x; для сего положимъ въ уравненіи касательной $y = 0$; тогда x перемѣнится въ OT, и мы получимъ:

$$-\beta = \frac{2c'}{\beta}(OT - \alpha), \text{ откуда}$$

$$OT - \alpha = -\frac{\beta^2}{2c'} \text{ или } OT - \alpha (= PT) = -2\alpha,$$

выраженіе *подкасательной* въ параболѣ, которое показываетъ, что подкасательная къ параболѣ равна удвоенной абсцисѣ; сіе представляетъ весьма легкій способъ проводить касательную къ параболѣ.

104) Поелику нормальная проходитъ чрезъ точку касанія перпендикулярно къ касательной, которой уравненіе есть (102), $y-\beta=\frac{2c'}{\beta}(x-\alpha)$, то уравненіе нормальной къ параболѣ будетъ: Уравненіе нормальной къ параболѣ; выраженія поднормальной, касательной и нормальной.

$$y-\beta=-\frac{\beta}{2c'}(x-\alpha);$$

въ сихъ двухъ уравненіяхъ тангенсы $\frac{2c'}{\beta}$ и $-\frac{\beta}{2c'}$, удовлетворяютъ условному уравненію $a'a''+1=0$ перпендикулярности двухъ прямыхъ.

По положеніи $y=0$ въ уравненіи нормальной MR, величина абсциса x перемѣнится въ OR, и мы получимъ:

$$-\beta=-\frac{\beta}{2c'}(OR-\alpha), \text{ откуда}$$

$$OR-\alpha\,(=PR)=\frac{2c'\beta}{\beta}=2c'=\tfrac{1}{2}p,$$

выраженія *поднормальной* въ параболѣ, которая по сему равна половинѣ параметра.

Выраженія *касательной* MT и *нормальной* MR получимъ изъ треугольниковъ MTP и PMR, съ помощію выведенныхъ нами выраженій для подкасательной и поднормальной; будемъ имѣть:

$$MT=\sqrt{PM^2+PT^2}=\sqrt{\beta^2+4\alpha^2}=\sqrt{p\alpha+4\alpha^2};$$

$$MR=\sqrt{PM^2+PR^2}=\sqrt{\beta^2+\tfrac{1}{4}p^2}=\sqrt{p\alpha+\tfrac{1}{4}p^2}.$$

105) Изслѣдуемъ положеніе касательной MT въ параболѣ относительно къ прямой MQ параллельной оси, и радіусу вектору FM. Для Положеніе касательной относи-

тельно къ радіусу вектору, и къ прямой параллельной оси, проведеннымъ чрезъ точку касанія. Фиг. 28.

сего замѣтимъ, что тангенсъ угла составляемаго касательною MT съ осью абсцисъ, или съ прямою MQ оной параллельною, есть $tang.\ MTF = \frac{2c'}{\beta}$ (102), а тангенсъ угла составляемаго радіусомъ векторомъ съ осью равенъ $-\frac{\beta}{c'-\alpha}$; притомъ общее выраженіе тангенса угла составляемаго двумя прямыми есть $\frac{a'-a''}{1+a'a''}$, почему и получимъ:

$$tang.\ TMF = \frac{\frac{\beta}{c'-\alpha} - \frac{2c'}{\beta}}{1 - \frac{2c'}{c'-\alpha}} = \frac{\beta^2 + 2c'^2 - 2c'\alpha}{\beta(c' + \alpha)},$$

или замѣчая что точка, коей координаты α и $\mathfrak{C}$ находится на параболѣ, по сокращеніи получимъ:

$$tang.\ TMF = \frac{2c'}{\beta}.$$

Изъ всего сего слѣдуетъ, что

$tang.\ TMF = tang.\ MTF = tang.\ TMQ$, то есть что въ *параболѣ углы составленные касательною съ радіусомъ векторомъ, и съ прямою параллельною оси, проходящими чрезъ точку касанія, равны между собою.*

Геометрическія построенія касательныхъ къ параболѣ: проведенной

106) Доказанное нами свойство касательной въ параболѣ, представляетъ способъ построенія оной.

а) Положимъ что точка M, чрезъ которую должно провести касательную дана на параболѣ.

Проведемъ чрезъ точку M прямую MQ параллельную оси, и возмемъ на сей прямой часть MQ равную радіусу вектору MF; соединимъ точку Q съ точкою F; прямая MT перпендикулярно на прямую QF. изъ данной точки M опущенная, будетъ по доказанному искомая касательная.

Чрезъ точку на оной, и проведенной чрезъ точку внѣ оной. Фиг. 28.

Легко можно доказать, что всѣ точки сей прямой MT находятся внѣ параболы, то есть что оныя не находятся ни на параболѣ, ни внутри оной. Для сего возмемъ гдѣ ни есть на сей прямой точку m; проведемъ прямыя mF, mQ и mN перпендикулярно къ AB; получимъ: $mQ = mF$, притомъ $mQ > mN$, слѣдовательно $mF > mN$, а посему точка m не находится на параболѣ.

Для точки находящейся внутри параболы, напримѣръ для точки m', по проведеніи прямыхъ $m'q$ и qf, получимъ: $m'F < qm' + qF$, но qF равна qG, слѣдовательно $m'F < qm' + qG$ или $m'F < m'G$; поелику же для точки m имѣли $mF > mN$, то изъ сего и заключимъ, что сія точка m не будетъ находиться и внутри параболы.

b) Положимъ что точка G, изъ которой требуется провести касательную, дана внѣ параболы.

Радіусомъ GF равнымъ разстоянію данной точки до фокуса, описываютъ часть круга; чрезъ точки L и L′ пресѣченія оной съ линіею Фиг. 29.

направленія A B проводятъ прямыя LQ и L′Q′ параллельныя оси: прямыя G Q и G Q′ соединяющія данную точку G съ точками пресѣченія Q и Q′ прямыхъ параллельныхъ оси съ параболою, будутъ искомыя касательныя. Ибо, напримѣръ для GQ, по проведеніи прямыхъ FQ, GF и LG получимъ равенство треугольниковъ LGQ и GQF, изъ котораго уг. GQL = уг. GQF.

Опредѣлить аналитически положеніе касательной къ параболѣ, проведенной параллельно данной прямой.

107) Положимъ, что требуется опредѣлить уравненіе касательной къ параболѣ, которая бы была параллельна прямой, данной уравненіемъ $y = a' x + b'$. Положимъ, что координаты искомой точки касанія суть x' и y': тогда тангенсъ угла составляемаго касательною съ осью будетъ:

$$\frac{2c'}{y'} \ldots\ldots (102);$$

поелику искомая касательная должна быть параллельна данной прямой, то и получимъ условіе

$$\frac{2c'}{y'} = a'.$$

Притомъ точка касанія находится на параболѣ, а посему координаты ея удовлетворяютъ уравненію параболы, и мы получимъ условіе:

$$y'^2 = 4c'x'.$$

Изъ сихъ двухъ условій вопроса опредѣляютъ x' и y', координаты искомой точки касанія; тогда уравненіе искомой касательной будетъ:

$y - y' = a'(x - x')$, гдѣ x' и y' предположены имѣющими величины опредѣленныя изъ тѣхъ двухъ условій вопроса.

108) Тангенсъ угла составляемаго касательною съ осью абсцисъ есть (102) $\frac{2c'}{\beta}$, гдѣ $\mathfrak{C}$ есть ордината точки касанія.

Положеніе касательной въ параболѣ относительно къ діаметру проходящему чрезъ точку касанія; и выводимое изъ того построеніе касательной къ параболѣ.

При переходѣ изъ уравненія параболы отнесенной къ ея оси къ уравненію оной отнесенной къ ея діаметрамъ, между условными уравненіями имѣли уравненіе:

$\beta \cos.\psi - 2c' \sin.\psi = 0 \ldots\ldots$ (100), изъ котораго $\frac{\sin.\psi}{\cos.\psi} = tang.\psi = \frac{\mathfrak{C}}{2c'}$.

Поелику ψ означаетъ уголъ составленный осью ординатъ u съ осью ординатъ y, то явно что по означеніи чрезъ q угла составляемаго осью ординатъ u съ осью абсцисъ x, получимъ $\psi + q = 90^\circ$, слѣдовательно $tang.\psi = cot.q = \frac{1}{tang.q}$, а посему получимъ:

$$tang.\, q = \frac{2c'}{\beta},$$

то есть что ось ординатъ u проходящая, какъ мы показали (100), чрезъ точку параболы, будетъ касательна къ оной въ сей точкѣ, то есть въ концѣ діаметра параболы, съ которымъ сія ось составляетъ систему ординатъ, при коей уравненіе параболы имѣетъ видъ: $u^2 = p't$.

Основываясь на семъ свойствѣ можно построить касательную къ параболѣ, параллель-

ную данной прямой, когда дано очертаніе параболы; для сего проводятъ въ параболѣ двѣ хорды параллельныя данной прямой: прямая раздѣляющая сіи хорды по поламъ будетъ діаметръ. Чрезъ конецъ сего діаметра проводятъ прямую, параллельную симъ хордамъ, а посему и данной прямой; оная прямая будетъ искомая касательная.

Естьли дана точка на параболѣ, мы упомянули какъ провести изъ оной касательную основываясь на томъ, что подкасательная въ параболѣ равна удвоенной абсцисѣ. Сіе предполагаетъ что ось извѣстна; впрочемъ опредѣлить ось весьма легко, когда дано очертаніе параболы. Для сего проводятъ какой ни есть діаметръ QS, основываясь на томъ, что діаметръ долженъ раздѣлять пополамъ какую ни есть систему параллельныхъ между собою хордъ; изъ точки пресѣченія Q сего діаметра съ параболою проводятъ прямую QG' перпендикулярную къ сему діаметру QS, и изъ средины S' сей прямой, протягиваютъ прямую OS' параллельную діаметру QS; сія прямая будетъ осью, а посему точка O вершиною параболы: ибо прямая OS дѣлитъ пополамъ хорды, перпендикулярныя къ оной.

Полярное уравненіе параболы.

109) Отношеніе между радіусомъ векторомъ z и абсцисою x какой ни есть точки на параболѣ, есть (95): $z = c' + x$; сіе отношеніе можетъ быть употреблено къ построенію па-

раболы по точкамъ, подобно какъ мы видѣли въ эллипсисѣ, почему оное и можетъ быть названо уравненіемъ параболы.

Перемѣнимъ начало координатъ изъ вершины въ фокусъ; означивъ чрезъ x' абсцису PF отъ фокуса, получимъ OP $(= x) = c' - x'$; Фиг. 28. уравненіе между z и x обратится въ

$$z = 2c' - x'.$$

Полагая что уголъ составленный радіусомъ векторомъ FM$(=z)$ съ осью, уг. OFM$=\varphi$, изъ треугольника MPF будемъ имѣть: $x' = z\cos.\varphi$, и слѣдовательно:

$z = 2c' - z\cos.\varphi$, откуда $z = \frac{2c'}{1+\cos.\Phi}$, или по введеніи параметра, получимъ:

$z = \frac{\frac{1}{2}p}{1+\cos.\Phi}$, *полярное* уравненіе параболы.

Сблизивъ полярныя уравненія эллипсиса, иперболы и параболы усматриваемъ, что полярное уравненіе эллипсиса:

$$z = \frac{\frac{1}{2}p}{1+\frac{c}{a}\cos.\Phi} \quad \ldots\ldots\ldots (65)$$

можетъ представлять уравненіе иперболы когда a отрицательное и $c > a$, а параболы когда $c = a$, и a безконечное.

Когда же разсмотримъ полярное уравненіе эллипсиса по приданіи оному вида:

$z = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos.\Phi}$, тогда заключимъ что оное будетъ принадлежать: эллипсису когда $e<1$, кругу когда $e=0$, ибо тогда $z=a$, иперболѣ когда $e>1$ и a отрицательное, и наконецъ параболѣ когда $e=1$ и a безконечное.

ИЗСЛѢДОВАНІЕ УРАВНЕНІЙ.

110) Мы разсмотрѣли частныя уравненія круга, эллипсиса, иперболы и параболы; показали свойства сихъ кривыхъ и всѣ обстоятельства ихъ хода; но замѣтимъ что сіи кривыя линіи не всегда выражаются уравненіями, имѣющими простый видъ, и по которымъ мы ихъ разсматривали. При изслѣдованіи всякаго уравненія должно слѣдовать ходу, изъясненному нами въ общемъ способѣ (9) опредѣлять видъ линіи изъ даннаго уравненія оной и приложенному въ послѣдствіи къ частнымъ уравненіямъ круга, эллипсиса, иперболы и параболы. Поелику примѣръ болѣе сложный, а посему заключающій болшее число приложеній общаго способа, лучше объяснитъ намъ сей способъ, то мы и займемся разсматриваніемъ какого свойства кривыя линіи представляетъ намъ общее уравненіе второй степени съ двумя неопредѣленными.

Приложеніе общаго

111) Общее уравненіе второй степени съ двумя неопредѣленными, есть:

го способа къ изслѣдованію общаго уравненія кривыхъ линій втораго порядка.

$$A y^2 + B x y + C x^2 + D y + E x = F;$$

по раздѣленіи всѣхъ членовъ онаго на A, и положеніи для краткости: $\frac{B}{A} = b$, $\frac{C}{A} = c$, $\frac{D}{A} = d$, $\frac{E}{A} = e$. $\frac{F}{A} = f$, что нимало не перемѣнитъ всеобщности предложеннаго уравненія, получимъ:

$$y^2 + b x y + c x^2 + d y + e x = f.$$

Извлечемъ изъ сего уравненія величину ординаты y въ величинѣ абсцисы x; будемъ имѣть:

$$y = -\tfrac{1}{2}(bx+d) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(4f+d^2) - 2(2e-bd)x - (4c-b^2)x^2};$$

или положивъ $y + \frac{1}{2}(bx + d) = t$, получимъ:

$$t = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(4f+d^2) - 2(2e-bd)x - (4c-b^2)x^2}.$$

Сіе уравненіе есть уравненіе той же кривой линіи, но токмо отнесенной къ системѣ координатъ t и x: построимъ сію новую систему координатъ. Для сего замѣтимъ, что условіе перехода отъ первоначальной прямоугольной системы къ новой системѣ осей t и x, означается уравненіемъ $y + \frac{1}{2}(bx + d) = t$; положивъ въ ономъ $t = 0$, получимъ $y = -\frac{b}{2}x - \frac{d}{2}$, уравненіе прямой FE, пресѣкающей ось ординатъ y въ разстояніи отъ начала координатъ A равномъ $-\frac{1}{2}d$ и составляющей внизу оси, въ сторонѣ абсцисъ отрицательныхъ, съ сею осью уголъ FEA, коего тангенсъ есть $\frac{b}{2}$. На сей прямой FE имѣемъ $t = 0$, изъ чего и слѣдуетъ, что новыя ординаты t щитаются отъ сей прямой; почему мы и перейдемъ отъ

Фиг. 50.

абсцисы x ($=$ AP) къ абсцисѣ DN ($=$ напр. s), соотвѣтствующей абсцисѣ x, но считающейся на прямой EF; въ треугольникѣ DGN получимъ: DG ($=$ AP) $=$ DN *cos.* GDN $=$ DN *cos.* FEA, и поелику *tang.* FEA $=\frac{b}{2}$, то мы получимъ $x=\frac{2}{\sqrt{4+b^2}}.s$, или положивъ для краткости $\frac{2}{\sqrt{4+b^2}}=q$, будемъ имѣть $x=qs$.

Поставивъ сію величину въ уравненіе между x и t, въ которомъ для простоты, положивъ: $4f+d^2=p$, $2e-bd=n$, и $4c-b^2=m$, получимъ:

$$t=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{p-2nqs-mq^2s^2},$$

уравненіе той же кривой линіи, но отнесенной къ системѣ координатъ косоугольныхъ t и s; ось ординатъ будетъ DC, ось абсцисъ DF, начало координатъ въ точкѣ D.

Поелику существованіе кривой линіи зависитъ отъ того, будетъ ли ордината t имѣть дѣйствительныя величины, то мы и должны разсмотрѣть знакъ выраженія $p-2nqs-mq^2s^2$; но знакъ сего выраженія, по извѣстнымъ правиламъ алгебры, зависитъ отъ члена, въ который абсциса s входитъ во второй или самой высшей степени, почему мы и примемъ въ разсужденіе знакъ члена $mq^2s^2\left(=\frac{4A^2(4AC-B^2)}{4A^2+B^2}s^2\right)$ зависящій отъ знака предстоящаго mq^2, то есть отъ знака m.

И такъ займемся разсматриваніемъ случаевъ, когда m положительное, когда m отрицательное, и когда $m=0$; сіи случаи будутъ соотвѣтствовать въ первоначальномъ уравненіи тѣмъ случаямъ, когда $4AC>B^2$, когда $4AC<B^2$, и когда $4AC=B^2$.

112) Разсмотримъ первый изъ сихъ случаевъ, въ которомъ m положительное; тогда уравненіе между t и s не перемѣнитъ своего вида; для приведенія сего уравненія въ простѣйшій видъ уничтожимъ въ ономъ членъ, въ который входитъ неопредѣленное s въ первой степени; для сего должно положить:

Случай, когда $4AC>B^2$: эллипсисъ.

$$s = u - \frac{n}{mq}.$$

По вставленіи сей величины s въ уравненіе между t и s, получимъ:

$$t = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{mq^2\left(\frac{pm+n^2}{m^2q^2} - u^2\right)};$$

придавъ сему уравненію видъ:

$$t = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{mq^2}.\sqrt{\frac{pm+n^2}{m^2q^2} - u^2}, \text{ и положивъ}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{mq^2} = \frac{b'}{a'}, \text{ и } \frac{pm+n^2}{m^2q^2} = a'^2,$$

получимъ:

$$t = \pm\frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - u^2}.$$

Изъ чего и видно, что въ семъ случаѣ общее уравненіе второй степени съ двумя неопредѣленными представляетъ *эллипсисъ*, который будучи отнесенъ къ системѣ осей t и u выражается выведеннымъ нами уравненіемъ, и коего при семъ полусопряженные діаметры будутъ:

$$a' = \pm\sqrt{\frac{pm+n^2}{m^2q^2}}, \text{ и } b' = \pm\sqrt{\frac{mp+n^2}{4m}}.$$

Для нахожденія начала координатъ t и u, положимъ въ условномъ уравненіи $s = u - \frac{n}{mq}$ абсцису $u = 0$, получимъ $s = -\frac{n}{mq}$; отложивъ прямую $DO = \frac{n}{mq}$ въ сторону абсцисъ отрицательныхъ, получимъ точку O, начало координатъ t и u, то есть центръ эллипсиса ILI′L′, коего полусопряженные діаметры будутъ:

$$OI\,(=a') \text{ и } OL\,(=b').$$

Кругъ. 113) Естьли въ семъ случаѣ имѣемъ $\frac{pm+n^2}{m^2q^2} = \frac{pm+n^2}{4m}$, то есть $mq^2 = 4$, или возходя къ предстоящимъ начальнаго уравненія $\frac{4AC-B^2}{A^2} \cdot \frac{4A^2}{4A^2+B^2} = 4$, откуда $4AC-B^2 = 4A^2+B^2$, тогда положивъ въ семъ уравненіи $B = 0$, получимъ изъ онаго $A = C$.

Но положеніе $B = 0$ обращаетъ тангенсъ угла $FEA = \frac{1}{2}b = \frac{B}{2A}$ въ нуль, изъ чего и слѣдуетъ, что тогда ось u дѣлается параллель-

ною оси x, то есть что оси координатъ t и u тогда между собою перпендикулярны, а по сему отъ положенія $a' = b'$, выведенное нами уравненіе для эллипсиса обращается въ уравненіе круга.

Изъ чего и заключимъ, что общее уравненіе второй степени съ двумя неопредѣленными будетъ принадлежать кругу, когда имѣемъ $A = C$, и $B = 0$.

114) Естьли количество $a'^2 \left(= \frac{pm + n^2}{m^2 q^2} \right)$ будетъ отрицательное, что можетъ случиться, когда p будетъ отрицательное, и $pm > n^2$, получимъ: $t = \pm \frac{b}{a} \sqrt{-a'^2 - u^2}$, слѣдственно величина ординаты t будетъ всегда мнимая, а по сему, въ семъ случаѣ, общее уравненіе второй степени съ двумя неопредѣленными не представляетъ ни какой линіи. *Уравненіе не представляетъ ни какой линіи.*

115) Естьли въ случаѣ когда p отрицательное, имѣемъ притомъ $pm = n^2$, тогда $a' = 0$ и $b' = 0$, но $\frac{b'}{a'} = \frac{1}{2} \sqrt{mq^2}$, почему и получимъ: *Точка.*

$$t = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{mq^2} \cdot \sqrt{-u^2} = \pm \tfrac{1}{2} q u \sqrt{-m},$$

уравненіе, которому можно удовлетворить положивъ въ тоже время $t = 0$, и $u = 0$, что даетъ намъ точку, и именно, начало координатъ.

116) Разсмотримъ теперь вторый случай, когда m отрицательное; уравненіе между t и s будетъ тогда *Случай, когда $4AC < B^2$; гипербола.*

$$t = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{p - 2nqs + mq^2 s^2};$$

для приведенія сего уравненія въ простѣйшій видъ, уничтожимъ въ ономъ членъ, въ который входитъ неопредѣленное s въ первой степени; для сего должно положить:

$$s = u + \frac{n}{mq};$$ по вставленіи сей величины въ уравненіе, получимъ:

$$t = \pm \frac{1}{2} \sqrt{mq^2 \left(\frac{pm - n^2}{m^2 q^2} + u^2\right)}.$$

Положимъ $\frac{pm - n^2}{m^2 q^2} = \pm a'^2$, смотря потому будетъ ли $pm - n^2$ положительное, или отрицательное, и положивъ, какъ и прежде, $\frac{1}{4} mq^2 = \frac{b'^2}{a'^2}$ будемъ имѣть:

$$t = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{u^2 \pm a'^2}.$$

Для нахожденія начала координатъ t и u, возмемъ въ разсужденіе уравненіе $s = u + \frac{n}{mq}$; положивъ въ ономъ $u = 0$, получимъ $s = \frac{n}{mq}$; почему, отложивъ въ сторону абсцисъ положительныхъ часть $DO = \frac{n}{mq}$, опредѣлимъ точку O, начало координатъ t и u; ось ординатъ t есть OL, ось абсцисъ u есть OF. Уравненіе между t и u представляетъ два случая; взявъ уравненія обоихъ случаевъ и возвысивъ въ квадратъ, получимъ:

$$a'^2 t^2 - b'^2 u^2 = a'^2 b'^2,$$
$$b'^2 u^2 - a'^2 t^2 = b'^2 a'^2,$$

уравненія, кои различествуютъ между собою токмо тѣмъ, что во второмъ величины t и a' занимаютъ тѣ мѣста, которыя въ первомъ заняты величинами u и b', и обратно; почему мы и примемъ въ разсужденіе одно токмо изъ сихъ уравненій.

Уравненіе второе $b'^2u^2 - a'^2t^2 = b'^2a'^2$, какъ мы уже видѣли говоря въ особенности объ Фиг. 31. иперболѣ, будетъ принадлежать иперболѣ K I k, K′ I′ k' отнесенной къ ея сопряженнымъ діаметрамъ t и u, то есть L L′ и I I′; точка O есть центръ иперболы.

Уравненіе первое $a'^2t^2 - b'^2u^2 = a'^2b'^2$ принадлежитъ кривой Q L q, Q′ L′ q' того же вида, какъ и кривая K I k, K′ I′ k', но обращенной къ діаметру L L′ координатъ t такъ, какъ первая кривая обращена относительно къ діаметру II′ координатъ u.

Изъ чего и заключимъ, что въ случаѣ, когда m отрицательное, уравненіе второй степени съ двумя неопредѣленными представляетъ иперболу.

117) Естьли имѣемъ $a' = 0$, или $pm - n^2 = 0$, Двѣ прямыя линіи. что даетъ $b' = 0$, но $\frac{b'^2}{a'^2} = \frac{1}{4}mq^2$, тогда выраженіе t обратится въ:

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{mq^2u^2} = \pm\tfrac{1}{2}u\sqrt{mq^2}, \text{ или}$$

$$t = \pm\frac{b'}{a'}\sqrt{u}, \text{ что опредѣляетъ намъ}$$

двѣ прямыя линіи, которыя будутъ служить

асимптотами иперболѣ, разсмотрѣнной нами въ § 116.

Случай, когда $4AC = B^2$; *парабола.*

118) Разсмотримъ теперь третій случай, когда $m = 0$; уравненіе между t и s обращается тогда въ

$$t = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{p - 2nqs}, \text{ или}$$

$$t = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{-2nq\left(s - \tfrac{p}{2nq}\right)}, \text{ или}$$

положивъ $s - \frac{p}{2nq} = u$, получимъ:

$$t = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{-2nqu}, \text{ или представивъ } \tfrac{1}{2}nq \text{ чрезъ } e', \text{ будемъ имѣть:}$$

$$t = \pm \sqrt{-e'u}.$$

Чтобы опредѣлить начало координатъ t и u, возмемъ уравненіе $s - \frac{p}{2nq} = u$; положимъ въ ономъ $u = 0$, получимъ $s = \frac{p}{2nq}$; почему взявъ часть $DI = \frac{p}{2nq}$ въ сторону абсцисъ s положительныхъ, опредѣлимъ точку I, начало координатъ. Фиг. 32.

Конечное уравненіе между t и u есть уравненіе параболы RIr, которая, по причинѣ что u должно быть взято отрицательно, чтобы t имѣло величину дѣйствительную, обращаетъ ходъ свой въ сторону абсцисъ отрицательныхъ.

Двѣ прямыя параллельныя

119) Естьли въ уравненіи между t и s (118) имѣемъ $n = 0$, тогда сіе уравненіе обратится въ

$t = \pm \frac{1}{2}\sqrt{p}$, что и представляетъ намъ двѣ прямыя параллельныя оси абсцисъ s, проведенныя въ верху и внизу оси абсцисъ на разстояніе отъ начала, равное $\frac{1}{2}\sqrt{p}$. ныя оси абсцисъ.

120) Остается намъ разсмотрѣть токмо случай уравненія: Случай, когда $A = o$, и $C = o$.

$$A y^2 + B x y + C x^2 + D y + E x = F,$$

въ которомъ будемъ имѣть въ тоже время $A = o$, и $C = o$.

По сдѣланіи токмо $A = o$, хотя наши предположенія для приведенія сего уравненія въ простѣйшій видъ обращаются въ невозможныя, однако естьли притомъ C, предстоящій x^2 не равенъ нулю, тогда можно разрѣшить уравненіе относительно къ x, и приложить къ оному всѣ тѣ дѣйствія изчисленія, кои мы употребили предъ симъ, разрѣшивъ уравненіе относительно къ y.

Когда $A = o$, и $C = o$, получимъ:

$B x y + D y + E x = F$; раздѣливъ всѣ члены сего уравненія на B, и положивъ для краткости $\frac{D}{B} = d$, $\frac{E}{B} = e$, и $\frac{F}{B} = f$, получимъ:

$$x y + d y + e x = f.$$

Извлечемъ изъ сего уравненія величину ординаты y въ величинѣ абсцисы x; будемъ имѣть:

$$y = \frac{f - ex}{x + d};$$

положивъ $y = o$, получимъ $x = \frac{f}{e}$, выводъ, показывающій, что точка E, опредѣленная отло- Фиг. 55.

женіемъ въ сторону абсцисъ положительныхъ по оси абсцисъ AB разстоянія $AE = \frac{f}{e}$, будетъ точкою пресѣченія кривой съ сею осью. Когда $x > \frac{f}{e}$ ордината y обращается въ отрицательную, слѣдственно кривая переходитъ внизъ оси абсцисъ x за точкою E. Когда $x = 0$, получимъ $y = \frac{f}{d}$, величину опредѣляющую точку F, въ которой кривая пресѣкаетъ ось ординатъ AC.

По положеніи x отрицательнымъ, ордината y будетъ увеличиваться, поелику знаменатель $x + d$ уменьшается вычетомъ абсцисы x, и обращается въ нуль, когда $x = -d$. Въ семъ случаѣ y будетъ имѣть величину безконечную, показывающую, что кривая не встрѣтитъ прямой GS, проведенной въ разстояніи $AG = -d$, перпендикулярно къ оси AE.

Когда отрицательная величина абсцисы x будетъ больше d, тогда величина y перемѣняетъ знакъ; изъ чего и слѣдуетъ, что будетъ существовать внизу оси AB, по другую сторону GS, вѣтвь $K'I'k'$ подобная вѣтви KIk, но простирающая ходъ свой въ противную сторону, то есть оная будетъ приближаться къ AB по мѣрѣ того, какъ абсциса будетъ увеличиваться отрицательно.

Остается разсмотрѣть величины y, соотвѣтствующія увеличенію положительно или

отрицательно абсцисы x; для сего раздѣлимъ на x, числителя и знаменателя выраженія y; получимъ:

$$y = \frac{\frac{f}{x} - e}{1 + \frac{d}{x}},$$

выводъ, приближающійся болѣе и болѣе къ $y = -e$, по мѣрѣ того какъ дроби $\frac{f}{x}$ и $\frac{d}{x}$ будутъ уменьшаться, то есть, какъ x будетъ увеличиваться. Посему, по проведеніи въ разстояніи $AH = e$, внизу AB, прямой HS' параллельно оси, получимъ предѣлъ, къ которому вѣтви KIk и $K'I'k'$ будутъ болѣе и болѣе приближаться; и слѣдовательно части KIk и $K'I'k'$ искомой кривой, никогда не могутъ выйти изъ угла SOS', и противоположнаго оному.

Изъ сего изслѣдованія заключимъ, что предложенная уравненіемъ $xy + dy + ex = f$ кривая, принадлежитъ къ роду иперболъ: асимптоты ея параллельны осямъ координатъ.

Приложеніе перемѣны координатъ къ изслѣдованію общаго уравненія второй степени съ двумя неопредѣленными.

121) Мы разсмотрѣли всѣ случаи, кои могутъ встрѣтиться при изслѣдованіи уравненія $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F$, кривыхъ линій втораго порядка; при семъ разсматриваніи употребили мы общій способъ, изложенный нами въ § 9; теперь же покажемъ, какимъ образомъ перемѣна координатъ можетъ послужить къ приведенію даннаго къ изслѣдованію уравненія въ простѣйшій видъ, а посему

случай, когда $4AC > B^2$ и $4AC < B^2$.

къ легчайшему разпознаванію свойствъ кривой линіи, онымъ представленной.

Означивъ геометрически положенія, которыя мы употребили къ приведенію общаго уравненія кривыхъ линій втораго порядка къ виду $A't^2 + B'u^2 = F'$, (*) ... (112 и 116), мы видѣли, что для сего перехода должно было перемѣнить начало координатъ, и притомъ направленіе оси абсцисъ x; почему мы и возмемъ формулы (39), служащія для перемѣны начала координатъ и направленія оси абсцисъ, въ системѣ координатъ прямоугольныхъ. Сіи формулы суть:

$$x = t\cos.\varphi + \alpha,$$

$$y = t\sin.\varphi + u + \zeta;$$

по поставленіи вмѣсто x и y въ предложенное уравненіе сихъ величинъ, получимъ:

(*) Уравненія $t = \pm\frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - u^2}$, и $t = \pm\frac{b'}{a'}\sqrt{u^2 - a'^2}$, которыя суть $a'^2t^2 + b'^2u^2 = a'^2b'^2$, и $a'^2t^2 - b'^2u^2 = -a'^2b'^2$, разнствуя между собою токмо въ томъ, что въ первомъ предстоящіе t^2 и u^2 съ одинаковыми знаками, а во второмъ съ разными, могутъ быть представлены общимъ уравненіемъ $A't^2 + B'u^2 = F'$, изъ котораго получимъ эллипсисъ когда A' и B' имѣютъ одинакіе, и иперболу, когда разные знаки.

$t^2(A\sin^2\varphi+B\sin\varphi\cos\varphi+C\cos^2\varphi)+tu(2A\sin\varphi+B\cos\varphi)+Au^2$
$+t(2A\xi\sin\varphi+B\xi\cos\varphi+B\alpha\sin\varphi+2C\alpha\cos\varphi+D\sin\varphi+E\cos\varphi)$
$+u(2A\xi+B\alpha+D)=F-A\xi^2-B\alpha\xi-C\alpha^2-D\alpha-E\alpha.$

Чтобы сіе уравненіе имѣло видъ уравненія $A't^2-C'u^2=F'$, должно уничтожить въ оном члены, въ которые входятъ: tu, t, u; почему и получимъ условныя уравненія:

$$2A\sin.\varphi+B\cos.\varphi=0;$$
$$2A\xi\sin\varphi+B\xi\cos\varphi+B\alpha\sin\varphi+2C\alpha\cos\varphi+D\sin\varphi+E\cos\varphi=0;$$
$$2A\xi+B\alpha+D=0.$$

Сіи уравненія могутъ принять видъ:

$$2A\frac{\sin.\Phi}{\cos.\Phi}+B=0,$$
$$(2A\xi+B\alpha+D)\frac{\sin.\Phi}{\cos.\Phi}+B\xi+2C\alpha+E=0,$$
$$2A\xi+B\alpha+D=0;$$

или, введя во второе уравненіе условіе выраженное третьимъ, будемъ имѣть:

$$2A\,tang.\varphi+B=0,$$
$$B\xi+2C\alpha+E=0,$$
$$2A\xi+B\alpha+D=0.$$

Изъ сихъ уравненій получимъ:

$$tang.\Phi=-\frac{B}{2A},\quad \alpha=\frac{DB-2AE}{4AC-B^2},\quad \xi=\frac{BE-2CD}{4AC-B^2}.$$

По вставленіи сихъ величинъ въ уравненіе между t и u, положимъ, что предстоящій t^2 будетъ B', и что $F-A\xi^2-B\alpha\xi-C\alpha^2-D\xi-E\alpha=F$; тогда получимъ уравненіе

$B' t^2 + A u^2 = F'$, въ которомъ будемъ имѣть $B' = \frac{A}{4A^2+B^2}(4AC - B^2)$.

Сіе уравненіе между t и u, представляетъ эллипсисъ когда B' и A имѣютъ одинакіе знаки, иперболу когда B' и A имѣютъ знаки разные: эллипсисъ и ипербола отнесены въ ономъ къ ихъ сопряженнымъ діаметрамъ.

Поелику можно всегда предположить что A положительное, ибо въ противномъ случаѣ можно перемѣнить знаки уравненія, то изъ выраженія B' видно, что дабы B' было положительное должно имѣть $4AC > B^2$, а чтобы B' было отрицательное должно имѣть $4AC < B^2$, что согласно съ изложеннымъ нами въ § 112 и § 116, относительно къ случаямъ, въ которыхъ общее уравненіе даетъ эллипсисъ, или иперболу.

Уравненіе нами выведенное не можетъ представлять параболы, ибо, положивъ $4AC = B^2$, получаемъ для α и β величины безконечныя.

Случаи, когда $4AC > B^2$, $4AC < B^2$, $4AC = B^2$.

122) Чтобы употребить перемѣну координатъ для приданія уравненію $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F$ простѣйшаго вида въ случаѣ когда $4AC = B^2$, перемѣнимъ направленіе координатъ прямоугольныхъ въ прямоугольныя же координаты, не перемѣняя притомъ начала; для сего имѣемъ формулы: (40)

$$x = t \cos. \varphi - u \sin. \varphi,$$
$$y = t \sin. \varphi + u \cos. \varphi;$$

поставивъ выраженія для x и y въ предложенное уравненіе, получимъ:

$$(A\,sin.^2\varphi + B\,sin.\varphi\,cos.\varphi + C\,cos.^2\varphi)\,t^2$$
$$+ 2\,(2\,(A - C)\,sin.\varphi\,cos.\varphi + B(cos.^2\varphi - sin.^2\varphi))\,tu$$
$$+ (A\,cos.^2\varphi - B\,sin.\varphi\,cos.\varphi + C\,sin.^2\varphi)\,u^2$$
$$+ (D\,sin.\varphi + E\,cos.\varphi)\,t + (D\,cos.\varphi - E\,sin.\varphi)\,u = F.$$

Для уничтоженія въ семъ уравненіи члена, въ который входитъ произведеніе ut, положимъ:

$$2\,(A - C)\,sin.\varphi\,cos.\varphi + B\,(cos.^2\varphi - sin.^2\varphi) = 0;$$

сіе уравненіе можетъ принять видъ:

$$tang.^2\varphi - 2\,\frac{(A-C)}{B}\,tang.\varphi = 1,$$ откуда

$$tang.\varphi = \frac{A-C}{B} \pm \sqrt{\frac{B^2+(A-C)^2}{B^2}}.$$

Послѣ чего, означивъ предстоящіе t^2 и u^2, чрезъ A' и C', получимъ:

$$A't^2 + C'u^2 + (D\,sin.\varphi + E\,cos.\varphi)\,t + D\,cos.\varphi - E\,sin.\varphi)\,u = F.$$

Чтобы привести сіе уравненіе въ простѣйшій видъ, перемѣнимъ начало координатъ; для сего положимъ:

$t = t' + \alpha$, и $u = u' + \mathfrak{C}$; будемъ имѣть:

$$A't'^2 + C'u'^2 + (2\,A'\alpha + D\,sin.\varphi + E\,cos.\varphi)\,t'$$
$$+ (2\,C'\mathfrak{C} + D\,cos.\varphi - E\,sin.\varphi)\,u'$$
$$+ A'\alpha^2 + C'\mathfrak{C}^2 + (D\,sin.\varphi + E\,cos.\varphi)\,\alpha + (D\,cos.\varphi - sin.\varphi)\,\mathfrak{C} = F.$$

Разсматривая сіе уравненіе легко замѣтишь, что въ ономъ членъ заключающій u',

не можетъ быть уничтоженъ когда $C' = 0$, ибо тогда условное уравненіе:

$$2C'\xi + D\,cos.\,\varphi - E\,sin.\,\varphi = 0,$$ опредѣляетъ для ξ величину безконечную; почему для приведенія уравненія въ простѣйшій видъ, уничтожимъ въ ономъ членъ, въ который входитъ t', и членъ независимый отъ координатъ t' и u'; и такъ положимъ:

$$2A'\alpha + D\,sin.\,\varphi + E\,cos.\,\varphi = 0, \text{ и}$$

$$A'\alpha^2 + C'\xi^2 + (D\,sin.\varphi + E\,cos.\varphi)x + (D\,cos.\varphi - E\,sin.\varphi)\xi = 0.$$

Послѣ чего положимъ, для краткости, $2C'\xi + D\,cos.\,\varphi - E\,sin.\,\varphi = -E'$; получимъ уравненіе:

$$A'\,t^2 + C'\,u^2 - E'\,u' = 0.$$

Предстоящіе A' и C' онаго, опредѣляются изъ уравненій:

$$A' = A\,sin.^2\varphi + B\,sin.\,\varphi\,cos.\,\varphi + C\,cos.^2\varphi, \text{ и}$$

$$C' = A\,cos.^2\varphi - B\,sin.\,\varphi\,cos.\,\varphi + C\,sin.^2\varphi,$$ введя въ оныя величину, опредѣленную нами для *tang.* φ; оныя будутъ:

$$A' = \tfrac{1}{2}(C + A) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(C - A)^2 + B^2},$$

$$C' = \tfrac{1}{2}(C + A) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(C - A)^2 + B^2}.$$

Поелику намъ предлежитъ разсмотрѣть токмо случай, когда $C' = 0$ (*), то посему

(*) Положеніе $C' = 0$ соотвѣтствуетъ положенію $4AC = B^2$, что можно видѣть изъ уравненія, которое получимъ при семъ положеніи: $\frac{1}{2}(C+A) = \frac{1}{2}\sqrt{(C-A)^2 + B^2}$, возвысивъ обѣ части въ квадратъ.

введемъ въ условныя уравненія между α и β, и въ уравненіе между t и u сіе положеніе; будемъ имѣть:

$2A'\alpha + D\sin.\varphi + E\cos.\varphi = 0$,

$A'\alpha^2 + (D\sin.\varphi + E\cos.\varphi)\alpha + (D\cos.\varphi - E\sin.\varphi)\beta = 0$, и

$A't^2 = E'u'$, уравненіе параболы отнесенной къ ея оси, и коей параметръ равенъ $\frac{E'}{A'}$. Направленіе оси извѣстно, ибо положеніе u' опредѣляется угломъ φ, величина тангенса коего нами выведена; для опредѣленія начала координатъ t и u, или все тоже вершины параболы, должно опредѣлить α и β изъ сихъ двухъ условныхъ уравненій, по введеніи въ оныя величины для тангенса угла φ; поставивъ величину для β въ положеніе $2C'\beta + D\cos.\varphi - E\sin.\varphi = -E'$ опредѣлимъ E', и поелику величину A' имѣемъ, то и параметръ параболы опредѣлится.

Замѣтимъ, что уравненіе $A't^2 + C'u^2 - E'u' = 0$ представляетъ всѣ кривыя линіи втораго порядка, а именно: эллипсисъ когда A' и C' имѣютъ одинакіе знаки, и кругъ когда въ семъ случаѣ $A' = C'$; иперболу когда A' и C' имѣютъ разные знаки, и наконецъ параболу, когда $C' = 0$. Чтобы въ семъ удостовѣриться стоитъ только сравнить сіе уравненіе, съ частными уравненіями: эллипсиса, круга, иперболы и параболы, отнесенныхъ къ вершинѣ (27, 47, 71 и 95).

Случай, когда $B = 0$, и $A = C$.

123) Въ случаѣ, когда $B = 0$, и $A = C$ въ общемъ уравненіи второй степени съ двумя неопредѣленными, оное обратится въ

$$A y^2 + A x^2 + D y + E x = F;$$

сіе уравненіе, какъ мы показали въ § 113, принадлежитъ кругу; координаты центра сего круга и длина радіуса могутъ быть весьма легко опредѣлены, посредствомъ перемѣны координатъ.

Для сего перемѣнимъ одно токмо начало то есть поставимъ въ предложенное уравненіе вмѣсто x и y, величины,

$$x = t + \alpha, \quad y = u + \zeta; \text{ получимъ :}$$

$$Au^2 + At^2 + (2A\zeta + D)u + (2A\alpha + E)t = F - A\zeta^2 - A\alpha^2 - D\zeta - E\alpha$$

Поелику α и ζ суть количества произвольныя, то мы и положимъ:

$$2A\zeta + D = 0, \text{ и } 2A\alpha + E = 0;$$

$$\text{откуда } \zeta = -\frac{D}{2A}, \text{ и } \alpha = -\frac{E}{2A};$$

по вставленіи сихъ величинъ для α и ζ въ уравненіе между t и u, получимъ :

$$u^2 + t^2 = \frac{4AF + A(D^2 + E^2) + 2(D^2 + E^2)}{4A^2}.$$

Здѣсь оси координатъ t и u между собою перпендикулярны, почему сіе уравненіе есть уравненіе круга, коего радіусъ равенъ

$$\sqrt{\frac{4AF + A(D^2 + E^2) + 2(D^2 + E^2)}{4A^2}}$$

а координаты новаго начала координатъ, то есть центра круга, суть: абсциса $-\frac{E}{2A}$, а ордината $-\frac{D}{2A}$.

124) Естьли въ общемъ уравненіи имѣемъ $A=0$ и $C=0$, тогда оное обращается въ $Bxy+Dy+Ex=F$; сіе уравненіе представляетъ намъ кривую линію въ родѣ иперболы, и коей асимптоты между собою перпендикулярны (120). Перемѣна координатъ можетъ послужить въ семъ случаѣ къ тому, чтобы привести сіе уравненіе къ виду $tu=g^2$, уравненія иперболы, отнесенной къ ея асимптотамъ. Случай, когда $A=0$, и $C=0$.

Перемѣнимъ начало координатъ, то есть поставимъ въ предложенное уравненіе, вмѣсто x и y, величины:

$x=t+\alpha$, $y=u+\zeta$; уравненіе обратится въ

$$Btu+(B\alpha+D)u+(B\zeta+E)t=F-B\alpha\zeta-D\zeta-E\alpha.$$

Для уничтоженія членовъ, въ которые входятъ t и u, положимъ:

$$B\alpha+D=0, \text{ и } B\zeta+E=0; \text{ откуда}$$

$$\alpha=-\frac{D}{B}, \text{ и } \zeta=-\frac{E}{B}.$$

По поставленіи сихъ величинъ въ уравненіе между t и u, будемъ имѣть:

$$tu=\frac{BF+ED}{B^2} \ldots\ldots (q).$$

Координаты новаго начала t и u, суть: абсцисса $-\frac{D}{B}$, а ордината $-\frac{E}{B}$; оси t и u проходятъ чрезъ сію точку параллельно осямъ x и y, а по сему перпендикулярно между собою; уравненіе (q) показываетъ, что оныя будутъ асимптотами иперболы. Замѣнивъ $\frac{D}{B}$, $\frac{E}{B}$, и $\frac{F}{B}$ буквами d, e и f, получимъ тѣже обстоятельства въ изслѣдованіи сей кривой, какія предъ симъ имѣли въ § 120.

125) Изслѣдованіе общаго уравненія второй степени съ двумя неопредѣленными, представило намъ довольно сложное приложеніе общаго способа разсматривать уравненія; изслѣдованіе какихъ ни есть числительныхъ уравненій, будетъ уже весьма простымъ измѣненіемъ въ ходѣ, который мы предъ симъ употребили. Замѣтимъ, что когда дано къ изслѣдованію какое ни есть числительное уравненіе, то не должно, узнавъ по предѣидущему къ какому случаю общаго уравненія оное принадлежитъ, руководствоваться поставленіемъ въ общія формулы того случая числительныхъ предсто̀ящихъ предложеннаго уравненія; но надлежитъ приложить къ оному, непосредственно, общій способъ изслѣдованія, и естьли будетъ нужно, то и перемѣну координатъ руководствуясь при семъ тѣми способами, которые мы употребили при приложеніи перемѣны координатъ къ изслѣдованію общаго ура

вненія, смотря по разнымъ величинамъ его предстоящихъ.

Для поясненія какъ должно поступать съ числительными уравненіями, предложимъ нѣкоторые примѣры.

126) Положимъ что данное къ изслѣдованію уравненіе есть: $y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y + 2x = 0$.

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y + 2x = 0;$$

сравнивъ предстоящіе сего уравненія съ предстоящими общаго уравненія второй степени съ двумя неопредѣленными находимъ, что $A = 1$; $B = -2$, $C = 2$; посему получимъ $4AC - B^2 = 4$, признакъ эллипсиса.

Положивъ $x = 0$ получимъ $y^2 - 2y = 0$, Фиг. 34. или $y(y-2) = 0$, откуда $y = 0$ и $y = 2$; изъ чего и слѣдуетъ, что искомая кривая пресѣкаетъ ось ординатъ y въ двухъ точкахъ: въ началѣ координатъ A, для котораго $y = 0$, и въ точкѣ A′, для которой $AA' = 2$.

Положивъ $y = 0$, получаемъ $2x^2 + 2x = 0$, или $x(x+1) = 0$, откуда $x = 0$ и $x = -1$, изъ чего и слѣдуетъ, что искомая кривая пресѣкаетъ ось абсцисъ въ двухъ точкахъ: въ началѣ координатъ A для котораго $x = 0$, и въ точкѣ B, для которой $AB = -1$.

Извлечемъ изъ даннаго уравненія величину ординаты y; будемъ имѣть:

$$y^2 - 2(x+1)y = -2x^2 - 2x;$$

или $y = x + 1 \pm \sqrt{1 - x^2}$.

Положивъ $y-x-1=t$, получимъ $t=\pm\sqrt{1-x^2}$; для нахожденія новой оси абсцисъ, положимъ $t=0$; получимъ изъ условнаго уравненія $y=x+1$, изъ чего и слѣдуетъ, что прямая BB′ составляющая съ осью абсцисъ x уголъ въ 45°, то есть коего тангенсъ равенъ единицѣ, и пресѣкающая ось y въ разстояніи $Ae=1$, будетъ новою осью абсцисъ; означивъ сіи абсцисы чрезъ s, получимъ $x=s\cos.\text{EBA}$ или $x=\frac{1}{\sqrt{2}}s$. Поставивъ сію величину въ уравненіе между t и x, получимъ:

$$t=\pm\sqrt{1-\tfrac{1}{2}s^2}.$$

Предложенная кривая въ семъ уравненіи отнесена къ двумъ осямъ координатъ косоугольныхъ: къ оси BB′ абсцисъ s, и къ оси Yy ординатъ t; начало координатъ въ точкѣ e.

Сіе уравненіе между t и s можетъ принять видъ $t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-s^2}$, которое сравнивъ съ уравненіемъ $t=\pm\frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2-s^2}$, находимъ $\frac{b'}{a'}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $a'^2=2$, откуда $a'=\pm\sqrt{2}$ и $b'=\pm 1$; и такъ имѣемъ длину сопряженныхъ діаметровъ BB′ и AA′ предложенной даннымъ уравненіемъ кривой, которая есть эллипсисъ и легко уже можетъ быть построена по точкамъ.

$x^2+y^2-x+y=1$.

127) Пусть требуется опредѣлить кривую линію представленную уравненіемъ x^2+y^2

$-x+y=4$. Сравнивъ предстоящіе сего уравненія съ предстоящими общаго уравненія второй степени о двухъ неопредѣленныхъ, получимъ: $A=1$, $C=1$ и $B=0$; почему и заключимъ, что предложенная даннымъ уравненіемъ кривая есть кругъ; опредѣлимъ координаты центра и длину радіуса сего круга, къ чему весьма удобно можно употребить (123) перемѣну координатъ.

И такъ возмемъ формулы: $x=t+\alpha$ и $y=u+\mathfrak{C}$; по поставленіи оныхъ въ уравненіе, будемъ имѣть:

$$t^2+u^2+(2\alpha-1)t+(2\mathfrak{C}+1)u=4-\alpha^2-\mathfrak{C}^2-\mathfrak{C}+\alpha.$$

Поелику α и $\mathfrak{C}$ произвольны, то мы и можемъ положить $2\alpha-1=0$, и $2\mathfrak{C}+1=0$, откуда $\alpha=\frac{1}{2}$, и $\mathfrak{C}=-\frac{1}{2}$; по вставленіи сихъ величинъ для α и $\mathfrak{C}$ въ уравненіе между t и u, получимъ:

$$t^2+u^2=\frac{15}{4};$$

сравнивъ оное съ уравненіемъ $t^2+u^2=a^2$ круга, когда начало координатъ въ центрѣ, получимъ: $a'=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}=\pm\frac{\sqrt{3\cdot5}}{2}$; координаты начала t и u, то есть координаты центра, суть: $AQ=\frac{1}{2}$ и $QQ'=-\frac{1}{2}$; и такъ описанный изъ точки Q' радіусомъ $Q'G$ равнымъ $\frac{\sqrt{3\cdot5}}{2}$ кругъ, будетъ мѣстомъ предложеннаго уравненія. Фиг. 35.

128) Положимъ что дано для изслѣдованія уравненіе: $y^2-2xy-x^2+2=0$; въ семъ случаѣ $y^2-2xy-x^2+2=0$.

имѣемъ: $A = 1$, $B = -2$, $C = -1$, посему $4AC - B^2 = -8$, признакъ иперболы.

Положивъ $y = 0$ въ данномъ уравненіи, получимъ $x^2 - 2 = 0$, или $x = \pm\sqrt{2}$, изъ чего и заключаемъ, что искомая кривая пресѣкаетъ ось абсцисъ x въ двухъ точкахъ: въ точкѣ e, для которой Ae равно $+\sqrt{2}$, и въ точкѣ e', для которой $Ae' = -\sqrt{2}$.

Фиг. 36.

Положивъ $x = 0$, получимъ $y = \pm\sqrt{-2}$, величину мнимую, что и показываетъ, что кривая не встрѣтитъ оси ординатъ y.

Извлечемъ изъ даннаго уравненія величину ординаты y въ величинѣ абсцисы x; получимъ:

$$y = x \pm \sqrt{2x^2 - 2}.$$

Положивъ, для краткости, $y - x = t$, получимъ:

$$t = \pm\sqrt{2x^2 - 2}.$$

Для нахожденія новой оси абсцисъ, положимъ въ условномъ уравненіи, $t = 0$, получимъ $y = x$; по сему прямая BB', проходящая чрезъ начало координатъ A, и составляющая съ осью абсцисъ уголъ BAe, равный $45°$, коего тангенсъ посему равенъ единицѣ, будетъ осью новыхъ абсцисъ, которыя мы означимъ, напримѣръ, чрезъ s; будемъ имѣть $x = s\cos.BAe$, или $x = \frac{1}{\sqrt{2}}s$, и уравненіе между t и u обратится въ $t = \pm\sqrt{s^2 - 2}$. Въ семъ уравненіи кривая отнесена къ осямъ координатъ: BB' оси абсцисъ

и AY оси ординатъ t; уравненію между t и можемъ придать видъ:

$t = \pm 1 . \sqrt{s^2 - 2}$, что и показываетъ, по положеніи $\frac{b'}{a'} = 1$, откуда $b' = a'$, и $a'^2 = 2$, что первый полудіаметръ вѣтви иперболы равенъ $\pm \sqrt{2}$. Положеніе сопряженныхъ діаметровъ и длина оныхъ извѣстны, посему предложенная даннымъ уравненіемъ равносторонняя иперола легко можетъ быть построена по точамъ.

129) Пусть предложено изслѣдовать ура- $y^2 - 2xy + x^2 + 2y = 0$.
неніе $y^2 - 2xy + x^2 + 2y = 0$. Въ семъ слуаѣ $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$, почему и полуимъ $4AC - B^2 = 0$, признакъ параболы.

Положимъ $y = 0$ въ данномъ уравненіи; будемъ мѣть $x^2 = 0$, или $x = 0$, то есть что парабола продитъ чрезъ начало координатъ A. Для $x = 0$, Фиг. 37.
олучимъ $y^2 + 2y = 0$, откуда $y = 0$ и $y = -2$, о есть парабола пресѣкаетъ ось ординатъ въ двухъ точкахъ: въ точкѣ A для которой $y = 0$, и въ точкѣ A′ для которой $AA' = -2$.

Извлечемъ изъ даннаго уравненія величину динаты y; будетъ:

$y = x - 1 \pm \sqrt{1 - 2x}$, и положивъ $-x + 1 = t$, получимъ:

$$t = \pm \sqrt{1 - 2x}.$$

Для нахожденія новой оси абсцисъ полоимъ $t = 0$, въ условномъ уравненіи; тогда по-

лучимъ $y = x - 1$, изъ чего и слѣдуетъ, что прямая B B′, пересѣкающая ось ординатъ y въ разстояніи AB′ -1, и составляющая со стороны абсциєъ положительныхъ, съ осью A X уголъ A B B′ въ 45°, коего по сему тангенсъ равенъ единицѣ, будетъ новою осью абсциєъ которыя означимъ, напримѣръ, чрезъ s. Будемъ имѣть $x = s \cos. \text{A B B}'$, или $x = \frac{1}{\sqrt{2}} S$, отъ чего уравненіе между t и x обратится въ

$$t = \pm \sqrt{1 - s\sqrt{2}};$$

здѣсь оси координатъ суть: B B′ ось абсциєъ s, а Б′ У ось ординатъ t; уравненіе между t и s можетъ принять видъ: $t = \pm \sqrt{-\sqrt{2}(s - \frac{1}{\sqrt{2}}}$

или, полагая $s - \frac{1}{\sqrt{2}} = u$, получимъ

$$t = \pm \sqrt{-u\sqrt{2}}.$$

Для нахожденія новаго начала t и u, положимъ въ условномъ уравненіи $u = 0$, почимъ $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$; изъ чего и слѣдуетъ что точка G, опредѣленная отложеніемъ разстоянія $\text{B}'\text{G} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, будетъ началомъ координатъ u и

Уравненіе $t = \pm \sqrt{-u\sqrt{2}}$, показываетъ что параметръ предложенной даннымъ уравненіемъ параболы, равенъ $\sqrt{2}$, и что она будетъ простираться въ сторону абсциєъ

отрицательныхъ, ибо, полагая u положительнымъ, то есть оставляя уравненіе въ настоящемъ видѣ, имѣемъ для ординаты t величины мнимыя. Поелику уравненіе между t и u совершенно опредѣлено, то сія парабола и можетъ быть построена по точкамъ.

130) Положимъ что къ изслѣдованію дано уравненіе $xy-x-y=2$:

$$x\,y - x - y = 2.$$

Въ семъ случаѣ получимъ $4AC-B^2=-1$, признакъ иперболы, что намъ уже извѣстно изъ предъидущаго (124).

Для приведенія сего уравненія въ простѣйшій видъ, положимъ $x=t+\alpha$, и $y=u+\beta$; по вставленіи будемъ имѣть:

$$t\,u+(\beta-1)\,t+(\alpha-1)\,u=2+\alpha+\beta-\alpha\beta.$$

Поелику α и β суть количества произвольныя, то мы и положимъ: $\beta-1=0$, и $\alpha-1=0$, откуда $\beta=1$, и $\alpha=1$, и уравненіе между t и u обратится въ

$$t\,u=3.$$

Для построенія осей t и u, найдемъ начало оныхъ, для сего, положивъ $t=0$, и $u=0$ въ уравненіяхъ $x=t+\alpha$, $y=u+\beta$, получимъ изъ оныхъ $x=\alpha=1$, и $y=\beta=1$, координаты сего начала O. Оси координатъ t и u, а посему асимптоты иперболы предложенной даннымъ уравненіемъ будутъ: Ot и Ou; ипербола

Фиг. 38.

можетъ быть легко построена по точкамъ, ибо ея уравненіе $tu = 3$ совершенно опредѣлено.

Можно построить и пресѣченія сей иперболы съ осями x и y; для сего положимъ въ предложенномъ уравненіи $x=0$, получимъ $y=-2$, и такъ точка E, для которой $AE = -2$, будетъ точкою пресѣченія кривой съ осью ординатъ y; для $y=0$, получимъ $x=-2$, посему точка D, для которой $AD=-2$, будетъ принадлежать искомой кривой.

$y^2-2xy+x^2-1=0$; $y^2-4xy+4x^2=0$; $y^2+2xy+x^2+1=0$.

131) Чтобы предложенные нами примѣры заключали въ себѣ всѣ, или почти всѣ случаи, могущіе встрѣтиться при изслѣдованіи числительныхъ уравненій, разсмотримъ еще слѣдующія уравненія:

1) $y^2 - 2xy + x^2 - 1 = 0$;
2) $y^2 - 4xy + 4x^2 = 0$;
3) $y^2 + 2xy + x^2 + 1 = 0$.

Положивъ въ первомъ $x=0$, получимъ $y^2=1$, или $y=\pm 1$; а положивъ $y=0$, получимъ $x=\pm 1$; изъ чего и заключимъ, что точки a и a', для которыхъ $Aa=+1$, и $Aa'=-1$, принадлежатъ предложенной линіи, и что точки b и b', для Фиг. 39. которыхъ $Ab=+1$, $Ab'=-1$, суть точки ея встрѣчи съ осью абсцисъ. Уравненіе даетъ: $y=x+1$, и $y=x-1$, что представляетъ намъ *двѣ параллельныя между собою прямыя* ab' и $a'b$: углы, составленные оными съ осью будутъ въ 45°,

Полагая, поперемѣнно, $x=0$, и $y=0$ во второмъ изъ предложенныхъ уравненій, получимъ $y=0$, и $x=0$, то есть, что начало координатъ A принадлежитъ предложенной линіи. Уравненіе даетъ $y=2x$, что представляетъ намъ *одну прямую линію* A B, проходящую чрезъ начало координатъ, и для которой имѣемъ: *tang.* B A X $=2$. Фиг. 40.

Полагая въ третьемъ уравненіи поперемѣнно $x=0$, и $y=0$, получимъ $y=\pm\sqrt{-1}$, и $x=\pm\sqrt{-1}$, выводы, показывающіе что предложенная линія не пресѣкаетъ осей координатъ. Уравненіе даетъ $y=-x\pm\sqrt{-1}$, или $y=-x+\sqrt{-1}$, и $y=-x-\sqrt{-1}$, *двѣ мнимыя прямыя.*

О б щ е е свойство в с ѣ х ъ кривыхъ л и н і й втораго порядка.

132) Чтобы показать свойство, общее всѣмъ кривымъ линіямъ втораго порядка, предложимъ вопросъ вывести уравненіе кривой линіи, въ которой бы отношеніе между разстояніями: всякой ея точки до неподвижной прямой, и до неподвижной точки, было постоянно.

Пусть A B будетъ неподвижная прямая, и F данная точка, а n сіе постоянное отношеніе; опустимъ изъ точки F на прямую AB перпендикуляръ A F. Явно что точка I, для которой имѣемъ: Фиг. 41.

$$\frac{AI}{IF}=n,$$

будетъ принадлежать искомой кривой; означивъ прямую I F чрезъ c', получимъ $AI=nc'$,

Примемъ прямую IF за ось абсцисъ x, а прямую IY, къ оной перпендикулярную, за ось ординатъ y, и неопредѣленныя координаты точки M, гдѣ ни есть на искомой кривой предположенной, означимъ чрезъ x и y. Для опредѣленія уравненія искомой кривой, должно вывести отношеніе между неопредѣленными x и y, означающее свойство сей кривой.

Для сего проведемъ прямую MF и прямую MQ, перпендикулярную къ AB; свойство кривой будетъ выражено чрезъ $\frac{QM}{MF} = n$. Въ треугольникѣ PMF, въ которомъ $PF = c' - x$, имѣемъ $MF = \sqrt{y^2 + (c'-x)^2}$; прямая $MQ (= AI + IP) = nc' + x$; поставивъ сіи величины для MQ и MF въ уравненіе между сими прямыми, получимъ:

$$n\sqrt{y^2 + (c' - x)^2} = nc' + x,$$ уравненіе искомой кривой, которое по возвышеніи онаго въ квадратъ, и разположеніи по степенямъ y и x, обратится въ

$$n^2y^2 + (n^2 - 1)x^2 - 2(n+1)nc'x = 0.$$

Сіе уравненіе имѣетъ видъ, совершенно подобный уравненію: $A't'^2 + C'u'^2 - E'u' = 0$, (122), всѣхъ кривыхъ линій втораго порядка, и будетъ принадлежать: эллипсису когда $n > 1$, иперболѣ когда $n < 1$; и параболѣ когда $n = 1$; изъ чего и слѣдуетъ, что предложенное нами свойство есть общее всѣмъ кривымъ линіямъ втораго порядка: прямая AB называется *линіею направленія*, относительно ко всѣмъ симъ кривымъ.

По раздѣленіи всѣхъ членовъ сего уравненія на n^2, оное приметъ видъ:

$$y^2 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) x^2 - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) c'x = 0,$$

и при положеніи $n = \frac{1}{0}$ обращается въ, $y^2 + x^2 - 2c'x = 0$, уравненіе круга, коего радіусъ есть c' .... (26); въ семъ случаѣ прямая $AI\,(= nc')$ получитъ величину безконечную, изъ чего и слѣдуетъ, что линія направленія круга удалена на безконечное разстояніе отъ точекъ на ономъ, то есть, что кругъ не имѣетъ линіи направленія.

133) Общее уравненіе кривыхъ линій втораго порядка, которое есть:

$A y^2 + B x y + C x^2 + D y + E x = F$, принимаетъ видъ: $y^2 + b x y + c x^2 + d y + e x = f$, изъ котораго усматриваемъ, что для опредѣленія сего уравненія должно, чтобы пять его предстоящихъ b, c, d, e, f, были извѣстны; но для опредѣленія сихъ пяти величинъ должно имѣть пять уравненій, а посему пять условій.

О числѣ условій, необходимомъ для опредѣленія общаго уравненія кривыхъ линій втораго порядка.

Такъ, напримѣръ, при заданіи пяти точекъ, коихъ координаты пусть будутъ: α и $\mathfrak{C}$, α' и $\mathfrak{C}'$, α'' и $\mathfrak{C}''$, α''' и $\mathfrak{C}'''$, α'''' и $\mathfrak{C}''''$, и когда требуется опредѣлить вообще кривую линію втораго порядка, проходящую чрезъ сіи точки, имѣемъ пять условныхъ уравненій:

$$\mathfrak{C}^2 + b\alpha\,\mathfrak{C} + c\alpha^2 + d\mathfrak{C} + e\alpha = f,$$
$$\mathfrak{C}'^2 + b\alpha'\,\mathfrak{C}' + c\alpha'^2 + d\mathfrak{C}' + e\alpha' = f,$$
$$\mathfrak{C}''^2 + b\alpha''\,\mathfrak{C}'' + c\alpha''^2 + d\mathfrak{C}'' + e\alpha'' = f,$$

$$\mathfrak{C}'''^2 + b\mathfrak{C}'''\alpha''' + b\alpha'''^2 + d\mathfrak{C}''' + c\alpha''' = f,$$
$$\mathfrak{C}''''^2 + b\mathfrak{C}''''\alpha'''' + b\alpha''''^2 + d\mathfrak{C}'''' + e\alpha'''' = f.$$

Изъ сихъ уравненій опредѣляются пять предстоящихъ: b, c, d, e и f, послѣ чего уравненіе, а потому и искомая кривая втораго порядка, опредѣлены будутъ.

Замѣтимъ, что иногда сіи уравненія могутъ обратиться въ противурѣчащія одно другому, какъ напримѣръ въ случаѣ, когда бы, три изъ данныхъ точекъ находились на одной прямой, ибо намъ извѣстно (30, 57, 81 и 101), что кривыя линіи втораго порядка, могутъ имѣть съ прямою токмо двѣ общія точки.

Легко усмотрѣть можно, что когда извѣстно къ которой именно изъ кривыхъ линій втораго порядка принадлежитъ искомая, и притомъ положеніе оной, то потребно менѣе условій для опредѣленія сей кривой. Въ случаѣ, напримѣръ, когда данъ центръ и положеніе оси въ эллипсисѣ, достаточно токмо двухъ точекъ для опредѣленія сей кривой; ибо пусть α и $\mathfrak{C}$, α' и $\mathfrak{C}'$ означаютъ координаты сихъ данныхъ на искомомъ эллипсисѣ точекъ; поелику уравненіе эллипсиса отнесеннаго къ его осямъ и центру есть $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, то условія вопроса будутъ:

$$a^2\mathfrak{C}^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2, \text{ и}$$

$$a^2\mathfrak{C}'^2 + b^2\alpha'^2 = a^2b^2, \text{ изъ которыхъ}$$

опредѣлимъ a и b, послѣ чего уравненіе $a^2y^2+b^2x^2=$

a^2b^2, а потому и эллипсисъ, будутъ опредѣлены совершенно.

О КРИВЫХЪ ЛИНІЯХЪ ПРЕСѢЧЕНІЯ КОНУСА СЪ ПЛОСКОСТІЮ.

134) Разсмотримъ кривыя линіи, которыя могутъ произойти отъ пресѣченія конуса съ плоскостію. Показать, что кривыя линіи пресѣченія конуса съ плоскостію, суть кривыя линіи втораго порядка. Фиг. 42.

Для сего пусть кругъ C B O представляетъ намъ основаніе конуса, а точка S, гдѣ ни есть взятая внѣ плоскости сего круга, вершину конуса. Тогда прямая SQ соединяющая вершину S съ центромъ Q круга, будетъ осью конуса; опустимъ изъ вершины S на плоскость основанія перпендикуляръ S N; чрезъ сей перпендикуляръ SN и ось SQ конуса проведемъ плоскость S Q N, которой пресѣченіе съ плоскостію основанія будетъ прямая C N: сія плоскость пресѣчетъ конусъ въ двухъ производящихъ S C, и S B, онаго. Проведемъ въ плоскости SCN какъ ни есть прямую LK, пресѣкающую обѣ производящія, SC и SB, конуса; чрезъ точку пресѣченія T, сей прямой съ плоскостію основанія, протянемъ прямую T U перпендикулярную къ C N, и положимъ, что сѣкущая плоскость проходитъ чрезъ прямыя L K и T U.

Пусть кривая L O′ K представляетъ сѣченіе сей плоскости съ конусомъ; вопросъ при-

веденъ будетъ къ тому, чтобы вывести уравненіе сей кривой; для сего примемъ прямую L K за ось абсцисъ x, точку K за начало координатъ, а прямую Ky параллельную прямой T U за ось ординатъ y. Возмемъ гдѣ ни есть на предположенной кривой сѣченія точку E, коей координаты K D и D E по сему будутъ означены чрезъ x и y: должно найти отношеніе между оными. Поелику прямая E D параллельна прямой TU, находящейся въ плоскости основанія, то и можемъ чрезъ сію прямую DE провести плоскость, параллельную основанію; кривая пресѣченія N O′ G E сей плоскости съ конусомъ, какъ намъ извѣстно изъ Геометріи начальной, будетъ кругъ; пресѣченіе сей плоскости съ плоскостію S C N будетъ прямая NG, параллельная прямой C N, почему прямая ED будетъ перпендикулярна къ оному діаметру NG сего круга, и мы получимъ, по свойству сего послѣдняго, уравненіе:

$$y^2 = \text{N D} \times \text{D G}.$$

Выразимъ прямыя N D и D G въ величинѣ абсцисы x точки E, и въ величинѣ угловъ, отъ коихъ зависитъ положеніе сѣкущей плоскости.

Изъ треугольника LND имѣемъ: $\frac{\text{ND}}{\text{LD}} = \frac{sin.\text{NLD}}{sin.\text{LND}}$, или $\frac{\text{ND}}{\text{LD}} = \frac{sin.(\text{LSK}+\text{LKS})}{sin.(\text{LSK}+\text{NGS})}$; а мѣпимъ, при томъ, что $\text{LD} = \text{LK} - \text{KD} = \text{LK} - x$; почему и получимъ: $\text{ND} = \frac{sin.(\text{LSK}+\text{LKS})}{sin.(\text{LSK}+\text{NGS})}(\text{LK} - x)$.

Изъ треугольника DKG имѣемъ: $\frac{DG}{DK} = \frac{sin.DKG}{sin.DGK}$, или $\frac{DG}{DK} = \frac{sin.LKS}{sin.NGS}$; притомъ замѣнивъ что DK есть x, получимъ:

$$DG = \frac{sin.LKS}{sin.NGS} \cdot x.$$

Положивъ для краткости уг. $LSK = \varphi$, уг. $LKS = \psi$, уг. $NGS = \varepsilon$, и $LK = P$, получимъ:

$$ND = \frac{sin.(\varphi+\psi)}{sin.(\varphi+\varepsilon)}(P - x), \text{ и } DG = \frac{sin.\psi}{sin.\varepsilon}x;$$

поставивъ сіи величины въ уравненіе между y, ND и DG, получимъ:

$$y^2 = \frac{sin.\psi}{sin.\varepsilon} \cdot \frac{sin.(\varphi+\psi)}{sin.(\varphi+\varepsilon)}(Px - x^2),$$ уравненіе кривой линіи, въ которой конусъ пресѣкается плоскостію.

Сіе уравненіе имѣетъ видъ совершенно подобный уравненію $A't^2 + C'u^2 - E'u = 0$, которое представляетъ всѣ кривыя линіи втораго порядка (122), изъ чего и заключимъ, что кривыя линіи пресѣченія конуса съ плоскостію, суть всѣ кривыя линіи втораго порядка; посему *коническія сѣченія* называются также кривыми линіями втораго порядка.

135) Сравнивъ общее уравненіе съ выведеннымъ нами, получимъ $A' = sin.\varepsilon\, sin.(\varphi+\varepsilon)$ и $C' = sin.\psi\, sin.(\varphi+\psi)$. При измѣненіи положенія плоскости, будетъ измѣняться уголъ ψ, а посему $\varphi+\psi$; положимъ что $\varphi+\psi < 2\pi$; Эллипсисъ и круги.

въ семъ случаѣ $sin.(\varphi+\psi)$ будетъ положительный, а по сему C' будетъ количество положительное, что соотвѣтствуетъ случаю, когда въ общемъ уравненіи A' и C' съ одинаковыми знаками; тогда кривая пресѣченія конуса съ плоскостію будетъ *эллипсисъ*, и сѣкущая плоскость пресѣкаетъ одну полу конуса.

Естьли въ семъ случаѣ имѣемъ $\psi=\varepsilon$, тогда сіе будетъ соотвѣтствовать тому, когда въ общемъ уравненіи положимъ $A'=C'$, то есть, тогда кривая линія пресѣченія будетъ *кругъ*. Не трудно видѣть, что при положеніи $\psi=\varepsilon$, сѣкущая плоскость принимаетъ положеніе, параллельное плоскости основанія конуса.

Естьли имѣемъ $\psi=$ уг. SNG и $\varepsilon=$ уг. SLK, то есть $\psi=2\pi-(\varepsilon+\varphi)$ и $\varepsilon=2\pi-(\psi+\varphi)$, тогда получимъ $sin.\psi=sin.(\varepsilon+\varphi)$ и $sin.\varepsilon=sin.(\psi+\varphi)$, а по сему будетъ $\frac{C'}{A'}=1$; слѣдовательно выведенное нами уравненіе сѣченій конуса, будетъ принадлежать кругу, то есть, что въ семъ положеніи сѣкущей плоскости, кривая линія пресѣченія будетъ *кругъ*. Замѣтимъ, что таковое положеніе сѣкущей плоскости, называется *антипараллельнымъ* основанію конуса.

Гипербола. 136) Положимъ что сѣкущая плоскость приметъ положеніе, при которомъ $\varphi+\psi>2\pi$;
Фиг. 43. въ семъ случаѣ $sin.(\varphi+\psi)$ будетъ отрицатель-

ный, а посему въ выведенномъ нами уравненіи между x и y, предстоящій $\frac{sin.\psi sin.(\Phi+\psi)}{sin.\vartheta sin.(\Phi+\vartheta)}$ будетъ отрицательный, и слѣдовательно сіе соотвѣтствуетъ случаю, когда въ общемъ уравненіи кривыхъ линій втораго порядка, предстоящіе A' и C' имѣютъ разные знаки; изъ сего заключимъ, что кривая линія пресѣченія будетъ *ипербола*. Въ семъ случаѣ сѣкущая плоскость пресѣкаетъ обѣ полы конуса.

137) Пусть сѣкущая плоскость приметъ положеніе, при которомъ $\phi+\psi=2\pi$; тогда имѣемъ $sin.(\phi+\psi)=o$. Замѣтимъ, что въ треугольникѣ SLK будетъ $\frac{KL}{KS}=\frac{sin.\Phi}{sin.(\Phi+\psi)}$, откуда $KL=\frac{sin.\Phi}{sin.(\Phi+\psi)}KS$; поелику же KL означена нами чрезъ P, то и будетъ $P=\frac{sin.\Phi}{sin.(\Phi+\psi)}.KS$; по поставленіи сей величины для P въ уравненіе между x и y, получимъ, по сокращеніи: Параболо. Фиг. 42.

$$y^2=\frac{sin.\psi}{sin.\vartheta}\cdot\frac{sin.\Phi}{sin.(\Phi+\vartheta)}x-\frac{sin.\psi}{sin.\vartheta}\frac{sin.(\Phi+\psi)}{sin.(\Phi+\vartheta)}x^2.$$

По приданіи сего вида общему уравненію кривыхъ линій пресѣченія конуса съ плоскостію, введемъ въ оное, условіе $sin.(\phi+\psi)=o$ разсматриваемаго нами случая; получимъ:

$$y^2=\frac{sin.\psi}{sin.\vartheta}\cdot\frac{sin.\Phi}{sin.(\Phi+\vartheta)}x,$$

уравненіе, которое подобно получаемому изъ уравненія кривыхъ линій втораго порядка, при

положеніи $C' = 0$; изъ чего и заключимъ, что въ семъ случаѣ кривая линія пресѣченія конуса съ плоскостію будетъ *парабола*. Легко можно видѣть, что тогда сѣкущая плоскость пресѣчетъ токмо одну полу конуса, и притомъ такъ, что будетъ имѣть положеніе, параллельное производящей сего конуса.

Фиг. 44

Точка; двѣ прямыя линіи; одна прямая.

138) При предположеніи $KL (= P) = 0$ въ уравненіи между x и y выведенномъ нами въ § 134, получимъ изъ онаго:

$$y^2 = - \frac{\sin\psi}{\sin\vartheta} \cdot \frac{\sin(\Phi+\psi)}{\sin(\Phi+\vartheta)} x^2.$$

Поелику при семъ предположеніи, сѣкущая плоскость проходитъ чрезъ вершину конуса, то явно, что сіе уравненіе будетъ общимъ уравненіемъ всѣхъ линій, въ которыхъ сѣкущая плоскость проходя чрезъ вершину конуса, можетъ пресѣчь оный.

Положимъ, что имѣемъ $\Phi + \psi < 2\pi$, что соотвѣтствуетъ эллипсису когда сѣкущая плоскость не проходитъ чрезъ вершину конуса; тогда выведенное нами уравненіе не перемѣняетъ своего вида, и изъ онаго имѣемъ:

$$y = \pm x \sqrt{- \frac{\sin\psi}{\sin\vartheta} \cdot \frac{\sin(\Phi+\psi)}{\sin(\Phi+\vartheta)}},$$

сіе уравненіе можетъ быть удовлетворено токмо положеніемъ, въ тоже время, $x = 0$ и $y = 0$;

но тогда получаемъ начало координатъ, или *вершину* конуса.

Положимъ, что имѣемъ $\phi + \psi > 2\pi$, что соотвѣтствуетъ иперболѣ, когда сѣкущая плоскость не проходитъ чрезъ вершину; тогда $sin.(\phi + \psi)$ будетъ отрицательный, и мы получимъ въ семъ случаѣ для линіи сѣченія, уравненіе:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{sin\psi\ sin(\varepsilon+\phi)}{sin\phi\ sin\ \phi+\varepsilon)}},$$

сіе уравненіе представляетъ намъ *двѣ прямыя линіи*, проходящія чрезъ начало координатъ, и служащія асимптотами иперболѣ. Поелику же начало есть вершина конуса, и сіи прямыя находятся на его поверхности, то явно, что въ семъ случаѣ плоскость пресѣкаетъ конусъ въ *двухъ* его *производящихъ*.

Положимъ, что $\phi + \psi = 2\pi$, что соотвѣтствуетъ параболѣ когда сѣкущая плоскость не проходитъ чрезъ вершину; тогда $sin(\phi + \psi) = o$, и мы получимъ для сѣченія: $y^2 = o$, или $y = o$, уравненіе *оси абсцисъ*. Но когда плоскость параллельна производящей конуса, тогда ось абсцисъ параллельна также сей производящей; слѣдственно, при совмѣщеніи начала координатъ съ вершиною конуса, то есть при предположеніи KL $(= P) = o$, ось абсцисъ совмѣстилась съ производящею конусъ; изъ чего и слѣдуетъ, что въ семъ случаѣ пресѣченіе конуса съ плоскостію будетъ *производящая* онаго.

Обозрѣніе. 139) Сблизивъ всѣ разсмотрѣнные нами случаи, и которые могутъ встрѣтиться при пресѣченіи конуса съ плоскостію, заключаемъ: 1) Когда представимъ себѣ рядъ плоскостей пресѣкающихъ какъ ни есть одну полу конуса и производящія противоположныя сей полы, что всѣ сѣченія сихъ плоскостей съ конусомъ будутъ *эллипсисы*: распространеніе сихъ эллипсисовъ будетъ уменьшаться по мѣрѣ того, какъ сѣкущая плоскость будетъ взята ближе къ вершинѣ конуса, такъ, что при прохожденіи плоскости чрезъ оную, эллипсисъ пресѣченія обратится въ одну *точку;* есть-ли сіи плоскости будутъ параллельны или антипараллельны основанію, тогда кривыя пресѣченія будутъ *круги.* 2) Когда представимъ себѣ рядъ плоскостей, пресѣкающихъ какъ ни есть обѣ полы конуса, что всѣ сѣченія сихъ плоскостей съ конусомъ будутъ *иперболы;* сіи иперболы будутъ стремиться къ обращенію въ двѣ прямыя линіи по мѣрѣ какъ сѣкущая плоскость будетъ взята ближе къ вершинѣ конуса, такъ что при прохожденіи сей плоскости чрезъ оную, ипербола пресѣченія обратится въ двѣ ея *асимптоты.* 3) Когда представимъ себѣ рядъ плоскостей пресѣкающихъ одну полу конуса параллельно производящей онаго, что всѣ сѣченія сихъ плоскостей съ конусомъ будутъ *параболы;* сіи параболы будутъ стремиться къ обращенію въ

одну прямую линію, по мѣрѣ приближенія сѣкущей плоскости къ вершинѣ конуса, и наконецъ, при прохожденіи сей плоскости чрезъ вершину онаго, парабола пресѣченія обратится *въ прямую* линію.

О РАЗРѢШЕНІИ ПО СТРОЕНІЮ УРАВНЕНІЙ ЧЕТВЕРТОЙ И ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНЕЙ ОБЪ ОДНОМЪ ПЕРЕМѢННОМЪ.

Общій способъ.

140) Чтобы показать соединеніе уравненій кривыхъ линій втораго порядка, изложимъ способъ, употребляемый для разрѣшенія по строенію уравненій четвертой и третьей степеней объ одномъ перемѣнномъ.

Для сего пусть $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$, представляетъ намъ общее уравненіе четвертой степени объ одномъ перемѣнномъ; предстоящіе A, B, C, D и E суть какія ни есть постоянныя количества: сіе уравненіе по раздѣленіи всѣхъ членовъ онаго на A, и по положеніи, для краткости, $\frac{B}{A}=p$, $\frac{C}{A}=q$, $\frac{D}{A}=r$ и $\frac{E}{A}=s$, обращается въ

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0.$$

Всякое уравненіе четвертой степени объ одномъ перемѣнномъ, можно принимать въ разсужденіе произшедшимъ отъ изключенія одного изъ перемѣнныхъ изъ двухъ уравненій

второй степени о двухъ перемѣнныхъ. Пусть одно изъ сихъ послѣднихъ уравненій, которое можетъ быть взято произвольно, будетъ $x^2 = p'y$, простѣйшее изъ уравненій кривыхъ линій втораго порядка; чтобы опредѣлить другое уравненіе второй степени, которое бы чрезъ соединеніе съ симъ давало предложенное уравненіе четвертой степени, положимъ что сіе другое уравненіе есть: $y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = f$, гдѣ b, c, d, e и f должно опредѣлить изъ условій вопроса.

Соединимъ сіи два уравненія второй степени; по вставленіи во второе на мѣсто y величины $\frac{x^2}{p'}$ извлеченной изъ перваго, и по расположеніи вывода по степенямъ перемѣннаго x, получимъ:

$$x^4 + bp'x^3 + (cp'^2 + dp')x^2 + ep'^2x + p'^2f = 0.$$

Чтобы сіе уравненіе было тожественное съ предложеннымъ, получимъ условія:

$$bp' = p,\ cp'^2 + dp' = q,\ ep'^2 = r,\ \text{и}\ p'^2f = s;$$

имѣемъ четыре уравненія и шесть неопредѣленныхъ: p', b, c, d, e, f, почему два изъ сихъ количествъ остаются произвольными, то есть мы можемъ располагать оными. Придавъ имъ какія ни есть величины, опредѣлимъ четыре остальные предстоящіе изъ выведенныхъ нами уравненій; послѣ чего получимъ уравненія:

$$x^2 = p'y, \text{ и}$$

$y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$, въ которыхъ предстоящіе уже будутъ извѣстны, а по сему самыя уравненія будутъ опредѣлены совершенно. Построивъ двѣ кривыя линіи втораго порядка, которымъ принадлежатъ сіи уравненія, опредѣлимъ точку пресѣченія сихъ кривыхъ; абсциса x сей точки будетъ удовлетворять въ тоже время обѣимъ симъ уравненіямъ, а по сему и предложенному уравненію четвертой степени:

$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, и слѣдовательно будетъ корнемъ сего уравненія, то есть величиною перемѣннаго x, которая должна быть опредѣлена по заданію вопроса.

Естьли данное къ разрѣшенію уравненіе будетъ третей степени, то легко можно ввести въ оное одинъ корень равный нулю, то есть умножить всѣ члены сего уравненія на $x = 0$, отъ чего оное перемѣнится въ уравненіе четвертой степени, и въ семъ видѣ можетъ быть рѣшено по показанному.

141) Пусть, напримѣръ, требуется найти сторону куба, который бы былъ равенъ удвоенному данному кубу. Приложеніе общаго способа къ рѣшенію задачи объ удвоеніи куба.

Положимъ, что a есть сторона даннаго куба, и означимъ чрезъ x сторону искомаго; уравненіе вопроса будетъ: $x^3 = 2a^3$, или $x^3 - 2a^3 = 0$; сіе послѣднее уравненіе, по умноженіи онаго на $x = 0$, приметъ видъ:

$$x^4 - 2a^3 x = 0.$$

Положимъ, что одно изъ уравненій второй степени, изъ соединенія коихъ разсматриваемъ произшедшимъ сіе уравненіе, будетъ $x^2 = py$, гдѣ p неопредѣлено. Положимъ, что другое искомое уравненіе будетъ:

$y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$, гдѣ b, c, d, e, f должно опредѣлить; соединивъ сіи два уравненія второй степени, какъ показано въ § 140, получимъ:

$$x^4 + bpx^3 + (cp^2 + dp)x^2 + ep^2x + p^2f = 0,$$

и по сравненіи сего уравненія съ предложеннымъ будемъ имѣть слѣдующія условія ихъ тожества:

$$bp = 0,\ cp^2 + dp = 0,\ ep^2 = -2a^3,\ p^2f = 0.$$

Поелику имѣемъ четыре условныя уравненія между b, c, d, e, f и p-шестью неопредѣленными, то и можемъ придать двумъ изъ оныхъ произвольныя величины; основываясь на семъ, положимъ $p = a$, и $c = o$; тогда для опредѣленія остальныхъ предстоящихъ будемъ имѣть:

$ba = 0,\ ca^2 + da = 0,\ ea^2 = -2a^3,\ a^2f = 0$; откуда

$$b = 0,\ d = 0,\ e = -2a,\ f = 0.$$

Поставивъ найденныя величины для b, e, d, f, равно какъ и величины приданныя p и c, въ предположенныя уравненія второй степени, получимъ:

$$x^2 = ay, \text{ и } y^2 = 2ax.$$

Построимъ сіи два уравненія, которыя, какъ мы видимъ, представляютъ *двѣ параболы*. Уравненіе $x^2 = ay$ представляетъ параболу ZAZ′ коей параметръ равенъ a, стороне даннаго куба, и которая пресѣчена осью y; уравненіе $y^2 = 2ax$ представляетъ параболу UAU′, коей параметръ равенъ $2a$ и которая пресѣкается осью x; абсциса AP точки пресѣченія M сихъ двухъ параболъ, будетъ стороною искомаго куба, ибо имѣемъ, въ тоже время, $\overline{AP}^2 = ay$, $y^2 = 2a\overline{AP}$, а посему $\left(\frac{\overline{AP}^2}{a}\right)^2 = 2a$. AP, или $\overline{AP}^3 = 2a^3$. Фиг. 45.

Естьлибы, разполагая количествами p и c положили $c = 1$, тогда бы имѣли условныя уравненія:

$$ba = 0,\ a^2 + da = 0,\ ea^2 = -2a^3,\ fa^2 = 0;$$

откуда $b = 0$, $d = -a$, $e = -2a$, $f = 0$;

почему два предположенныя уравненія второй степени обратились бы въ

$$x^2 = ay, \text{ и } y^2 + x^2 - 2ax - ay = 0.$$

Первое изъ сихъ уравненій принадлежитъ параболѣ, а второе кругу; почему въ семъ случаѣ вопросъ могъ бы быть рѣшенъ посредствомъ *параболы* и *круга*. Поелику мы довольно уже ознакомились съ построеніемъ уравненій, то и не войдемъ въ построеніе сихъ кривыхъ, оставляя оное для примѣра.

Приложеніе общаго способа къ рѣшенію задачи о дѣленіи угла на три части.

142) Пусть предложено еще по данному косинусу какого ни есть угла, найти косинусъ угла, составляющаго треть даннаго.

Положимъ, что 3 A представляетъ намъ уголъ, коего данный косинусъ равенъ a; означимъ чрезъ x искомый косинусъ угла A, треть даннаго. Между *cos.* 3 A и *cos.* A имѣемъ, изъ тригонометріи, уравненіе:

$$\cos. 3A = 4\cos.^3 A - 3\cos. A,$$ или, по поставленіи величинъ a и x вмѣсто *cos.* 3 A и *cos.* A получимъ

$$a = 4x^3 - 3x, \text{ или } 4x^3 - 3x - a = 0,$$

уравненіе вопроса, которое по умноженіи на $x = 0$, обращается въ

$$4x^4 - 3x^3 - ax = 0, \text{ или въ } x^4 - \tfrac{3}{4}x^3 - \frac{a}{4}x = 0.$$

Пусть уравненіе $x^2 = py$ будетъ одно изъ уравненій второй степени, отъ соединенія коихъ происходитъ сіе уравненіе вопроса; положимъ, что другое уравненіе есть $y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = f$; соединивъ сіи два уравненія, какъ въ § 141, получимъ:

$$x^4 + bpx^3 + (cp^2 + dp)x^2 + ep^2x + fp^2 = 0.$$

Для тожества сего уравненія съ уравненіемъ вопроса, получимъ условія:

$$bp = 0,\ cp^2 + pd = -\tfrac{3}{4},\ ep^2 = -\frac{a}{4},\ fp^2 = 0;$$

поелику двумя изъ шести неопредѣленныхъ количествъ: b, c, d, e, f и p располагать мо-

жемъ, то и положимъ $p = a$, и $c = o$; условныя уравненія обратятся въ:

$ba = o$, $da = -\frac{3}{4}$, $ea = -\frac{1}{4}$, $fa^2 = o$, откуда

$$b = o,\ d = -\frac{3}{4a},\ e = -\frac{1}{4a},\ \text{и}\ f = o.$$

По вставленіи всѣхъ сихъ величинъ въ предположенныя уравненія второй степени, получимъ:

$$x^2 = ay,\ \text{и}\ y^2 - \frac{3}{4a}y - \frac{1}{4a}x = o,$$

уравненія двухъ параболъ, почему вопросъ и можетъ быть разрѣшенъ посредствомъ *двухъ параболъ*.

Положивъ $p = a$, и $c = 1$ въ уравненіи $cp^2 + dp = -\frac{3}{4}$, получимъ $a^2 + da = -\frac{3}{4}$, откуда $d = -(\frac{3}{4a} + a)$; почему предположенныя уравненія второй степени обратятся въ:

$$x^2 = ay,\ \text{и}\ y^2 + x^2 - (\frac{3}{4a} + a)y - \frac{1}{4a}x = o;$$

первое есть уравненіе параболы, а второе круга; изъ сего слѣдуетъ, что вопросъ можетъ быть рѣшенъ посредствомъ *параболы* и *круга*.

Положивъ $p = a$, и $d = o$ въ уравненіи $cp^2 + pd = -\frac{3}{4}$, получимъ $ca^2 = -\frac{3}{4}$, откуда $c = -\frac{3}{4a^2}$, и мы будемъ имѣть:

$$x^2 = ay,\ \text{и}\ y^2 - \frac{3}{4a^2}x^2 - \frac{1}{4a}x = o;$$

второе изъ сихъ уравненій есть уравненіе иперболы; и такъ вопросъ можетъ быть разрѣшенъ посредствомъ *параболы и иперболы*.

Наконецъ положивъ $p = a$, и $d = -\frac{1}{a}$ въ уравненіи $cp^2 + dp = -\frac{3}{4}$, получимъ $ca^2 - 1 = -\frac{3}{4}$, или $c = \frac{1}{4a^2}$; почему будемъ имѣть:

$$x^2 = ay, \text{ и } y^2 + \frac{1}{4a^2}x^2 - \frac{1}{a}y - \frac{1}{4a}x = 0;$$

второе изъ сихъ уравненій есть уравненіе эллипсиса, изъ чего и слѣдуетъ, что вопросъ можетъ быть рѣшенъ помощію *параболы* и *эллипсиса*.

Изложимъ одно изъ сихъ рѣшеній, напримѣръ посредствомъ параболы и круга; для сего построимъ уравненія:

$$x^2 = ay, \text{ и } y^2 + x^2 - \left(\frac{3}{4a} + a\right)y - \frac{1}{4a}x = 0.$$

Фиг. 46. Уравненіе $x^2 = ay$ представляетъ намъ параболу Z′AZ, пресѣченную осью y, и коей параметръ равенъ a, косинусу даннаго угла.

Для построенія уравненія круга, перемѣнимъ начало координатъ; для сего поставимъ въ оное вмѣсто x и y величины $x = t + \alpha$, и $y = u + \mathfrak{C}$; получимъ:

$$u^2 + t^2 + \left(2\mathfrak{C} - \frac{3}{4a} - a\right)u + \left(2\alpha - \frac{1}{4a}\right)t = \left(\frac{3}{4a} + a\right)\mathfrak{C} + \frac{\alpha}{4a} - \alpha^2 - \mathfrak{C}^2.$$

Для приданія сему уравненію вида, который имѣетъ уравненіе круга, отнесеннаго къ центру; положимъ:

$$2\mathfrak{C} - \frac{3}{4a} - a = 0, \text{ и } 2\alpha - \frac{1}{4a} = 0,$$

откуда $\mathfrak{C} = \frac{3+4a^2}{8a}$, $\alpha = \frac{1}{8a}$, координаты новаго начала, а по сему центра круга, предложеннаго даннымъ уравненіемъ, ибо, положивъ $t = o$, и $u = o$ въ уравненіяхъ $x = t + \alpha$, и $y = u + \mathfrak{C}$, получимъ $x = \alpha$, и $y = \mathfrak{C}$. Взявъ $AG = \frac{1}{8a}$, и $GO = \frac{3+4a^2}{8a}$, опредѣлимъ искомый центръ O. Уравненіе между t и u, по поставленіи въ оное величинъ для α и $\mathfrak{C}$, обратится въ:

$$u^2 + t^2 = \left(\frac{3+4a^2}{8a}\right)^2 + \left(\frac{1}{8a}\right)^2;$$ означивъ радіусъ сего круга чрезъ r, получимъ:

$r = \sqrt{\left(\frac{3+4a^2}{8a}\right)^2 + \left(\frac{1}{8a}\right)^2}$; протянувъ прямую AO, имѣемъ

$$AO = \sqrt{AG^2 + GO^2} = \sqrt{\alpha^2 + \mathfrak{C}^2} = \sqrt{\left(\frac{3+4a^2}{8a}\right)^2 + \left(\frac{1}{8a}\right)^2} = r,$$

что и должно быть, ибо первоначальное уравненіе круга даетъ въ тоже время, $x = o$, и $y = o$. Опишемъ изъ точки O радіусомъ AO кругъ; сей кругъ пресѣчетъ параболу ZAZ′ въ четырехъ точкахъ: M, M′, M″ и A, и опредѣлитъ для x величины AP, AP′ и AP″; наибольшая изъ сихъ прямыхъ есть косинусъ угла, равнаго $\frac{3A}{3}$ $(= A)$; слѣдующая за оною опредѣляетъ косинусъ угла, равнаго $\frac{1}{3}(2\pi + 3A)$; наконецъ наименьшая изъ сихъ прямыхъ означаетъ косинусъ угла, равнаго $\frac{1}{3}(4\pi + 3A)$; ибо замѣтимъ, что дуги $3A$, $2\pi + 3A$, и $4\pi + 3A$ имѣютъ тотъ же косинусъ, что трети сихъ

дугѣ будутъ меньше 2π, и что, притомъ, чѣмъ уголъ менѣе, тѣмъ косинусъ онаго болѣе.

О ТОЧКАХЪ И ЛИНІЯХЪ, ПРИНИМАЯ ОНЫЯ ВЪ РАЗСУЖДЕНІЕ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

143) Разсматривая точки, линіи, и поверхности въ пространствѣ, относятъ положеніе оныхъ къ тремъ неподвижнымъ плоскостямъ, пресѣкающимся взаимно подъ извѣстными углами. Мы предположимъ, для большей простоты, что сіи три плоскости между собою перпендикулярны. Поелику разсматриваніе точекъ, линій, и поверхностей въ пространствѣ, должно имѣть мѣсто, относя оныя всегда къ симъ плоскостямъ, то Геометрія въ пространствѣ и можетъ быть названа *Геометріею между тремя плоскостями*, или *Геометріею о трехъ измѣреніяхъ*.

Опредѣленіе положенія точки въ пространствѣ.

144) Плоскости ZAX, ZAY и YAX, о которыхъ мы предъ симъ упомянули, перпендикулярныя между собою по двѣ, пресѣкутся въ трехъ прямыхъ AZ, AX, и AY: сіи прямыя будутъ также между собою перпендикулярны.

Фиг. 47.

Для опредѣленія положенія какой ни есть точки M въ пространствѣ, предполагаютъ, что изъ оной опущены на сіи три плоскости ZAX, ZAY, и YAX перпендикуляры MN, MN′

и MP′, коихъ точки пресѣченія съ сими плоскостями пусть будутъ N, N′, и P′. Естьли проведемъ чрезъ точку M плоскости MA′, MP и MC, параллельныя плоскостямъ ZAX, ZAY и YAX, то явно, что оныя съ сими послѣдними плоскостями составятъ параллелепипедъ A′N, коего ребра MN, MN′ и MP′ будутъ равны и параллельны ребрамъ AA′, AP и AC, находящимся на прямыхъ пресѣченія AY, AX, и AZ; почему мы и можемъ щитать длины прямыхъ MN, MN′ и MP′, которыми отнесена точка M къ тремъ перпендикулярнымъ плоскостямъ, на прямыхъ взаимнаго пресѣченія AY, AX, и AZ сихъ трехъ плоскостей. Сіи три прямыя, имѣя извѣстныя величины, опредѣлятъ всегда положеніе имъ принадлежащей точки; для сего, взявъ въ разсужденіе одну изъ трехъ перпендикулярныхъ плоскостей, напримѣръ плоскость ZAX, откладываютъ на прямой AX часть AP (= MN′), и на прямой AZ часть AC (= MP′); изъ точки N, опредѣленной сими двумя координатами на плоскости ZAX, возставляютъ къ сей плоскости перпендикуляръ, который будетъ параллеленъ прямой AY, и на семъ перпендикулярѣ отлагаютъ третію данную длину NM; точка M опредѣлится концемъ сей длины. И обратно, естьли дана точка M, то длины прямыхъ MN, MN′ и MP′, которыми оная отнесена къ плоскостямъ ZAX, ZAY, и XAY

опредѣлятся, ибо изъ одной точки на плоскость болѣе однаго перпендикуляра опустить неможно.

Прямыя MN, M N′ и M P′, опредѣляющія такимъ образомъ положеніе точки M въ пространствѣ, называются *координатами* сей точки; плоскости ZAX, ZAY, и XAY, къ которымъ относятъ положеніе точекъ, линій, и поверхностей въ пространствѣ, и на пресѣченіяхъ AY, AX, и AZ коихъ щитаютъ сіи координаты, называются *плоскостями координатъ*, прямыя ихъ пресѣченія AY, AX и Az, *осями координатъ*, а точка A *началомъ*. Когда точка M дана гдѣ ни есть, тогда ея координаты M N, MN′ и MP′ означаются неопредѣленными *y*, *x*, и *z*; оси координатъ AY, AX и AZ, на коихъ могутъ щитаться сіи координаты, называются также *осью y*, *осью x*, и *осью z*; а плоскости, содержащія оныя по двѣ: плоскость X A Z называется плоскостію координатъ *x* и *z*, плоскость X A Y плоскостію координатъ *x* и *y*, и наконецъ ZAY плоскостію координатъ *z* и *y*, или, просто, плоскостями *xz*, *xy*, и *zy*.

Проэкціею точки на плоскости называется конецъ перпендикуляра, опущеннаго изъ сей точки на сію плоскость. Посему точки N, N′ и P′ будутъ проэкціями точки M на плоскостяхъ координатъ; и изъ показаннаго слѣдуетъ, что двѣ проэкціи точки совершенно

опредѣляютъ ея положеніе. Плоскости координатъ называются также *плоскостями проэкцій*.

145) Замѣтимъ, что плоскости координатъ ZAX, ZAY, и YAX взаимно пресѣкаясь, составляютъ между собою восемь трегранныхъ угловъ: четыре ZAXY, ZAYX′, ZAX′Y′, ZAXY′ въ верху плоскости YAX, и четыре угла Z′AXY, Z′AYX′, Z′AX′Y′, Z′AY′X внизу оной; при опредѣленіи положенія точки M мы взяли въ разсужденіе токмо первый ZAXY изъ сихъ угловъ; явно, что отложивъ координаты точки M въ остальныхъ семи углахъ, получили бы еще семь точекъ, удовлетворяющихъ величинамъ сихъ координатъ. Но здѣсь координаты точекъ находящихся въ сихъ трегранныхъ углахъ, будутъ отличаться ихъ знаками; основываясь на томъ что мы сказали относительно къ сторонамъ, въ которыя должно щитать отрицательныя прямыя на плоскости, получимъ слѣдующія отличительныя свойства сихъ восьми трегранныхъ угловъ. Положимъ, что координаты точки даны уравненіями $x=a$, $y=b$, $z=c$; будемъ имѣть:

въ углѣ ZAYX .... $x=+a$, $y=+b$, $z=+c$, условно;
— — — ZAYX′.... $x=-a$, $y=+b$, $z=+c$;
— — — ZAX′Y′....$x=-a$, $y=-b$, $z=+c$;
— — — ZAXY′.... $x=+a$, $y=-b$, $z=+c$;
— — — Z′AXY.... $x=+a$, $y=+b$, $z=-c$;
— — — Z′AX′Y....$x=-a$; $y=+b$, $z=-c$;

Знаки координатъ; общія уравненія точки; уравненія осей, плоскостей и началъ координатъ; уравненія плоскостей, параллельныхъ плоскостямъ координатъ, и прямыхъ, параллельныхъ осямъ координатъ.

въ уголъ $Z'AX'Y'$ .... $x=-a$, $y=-b$, $z=-c$;
— — — $Z'AY'X$ .... $x=+a$, $y=-b$, $z=-c$.

Изъ чего видимъ, что уравненія $x=a$, $y=b$; $z=c$, опредѣляютъ положеніе въ пространствѣ одной только точки, а посему, по предположеніи что a, b, и c суть какія ни есть постоянныя величины, сіи уравненія будутъ *общими уравненіями точки.*

Естьлибы точка находилась на плоскости XZ, тогда бы имѣли $y=0$; сіе уравненіе выражая свойство всякой точки на плоскости XZ находящейся, есть уравненіе сей плоскости. Подобнымъ образомъ $x=0$ есть уравненіе плоскости yz, и $z=0$ уравненіе плоскости xy.

Естьлибы точка находилась на оси x, тогда бы имѣли $y=0$, и $z=0$; сіи уравненія означая свойство всякой точки, находящейся на оси x, будутъ уравненіями оси x. Подобнымъ образомъ $y=0$, и $x=0$ будутъ уравненіями оси z; а $z=0$, и $x=0$ уравненіями оси y.

Естьли бы предположили, что проведена плоскость, параллельная плоскости xz, тогда всякая точка сей плоскости была бы удалена постоянно отъ плоскости xz; сіе удаленіе означается перпендикуляромъ между сими двумя плоскостями, то есть ординатою y всякой точки на плоскости проведенной параллельно xz, почему $y=d$ будетъ уравненіемъ плоскости, параллельной плоскости xz. Подоб-

нымъ образомъ уравненіе $x = d'$ будетъ уравненіемъ плоскости, параллельной zy, а уравненіе $z = d''$ уравненіемъ плоскости параллельной xy.

Уравненія $x = d$; и $y = d'$ существуя въ то же время, означаютъ свойство всякой точки находящейся въ тоже время на плоскостяхъ параллельныхъ yz и xz, то есть на прямой пресѣченія сихъ плоскостей, и слѣдовательно будутъ уравненіями сей прямой; но сія прямая параллельна оси z, почему уравненія $x = d$; $y = d'$ будутъ уравненіями прямой, параллельной оси z. Подобнымъ образомъ $x = d$; $z = d''$ будутъ уравненіями прямой параллельной оси y; а $y = d'$ и $z = d''$ уравненіями прямой параллельной оси x.

Уравненія $x = o$, $y = o$, $z = o$ принадлежатъ точкѣ общей тремъ плоскостямъ координатъ, а посему точкѣ ихъ взаимнаго пресѣченія A, то есть *началу координатъ;* и такъ сіи уравненія будутъ уравненіями начала координатъ.

Опредѣленіе положенія прямой линіи; общія уравненія прямой линіи.

146) *Проэкціею* прямой на плоскости называется линія, проходящая чрезъ проэкціи на сей плоскости всѣхъ точекъ сей прямой. Перпендикуляры, опущенные изъ всѣхъ точекъ сей прямой на сію плоскость, и которые своими пресѣченіями опредѣлятъ точки для проэкціи прямой, будутъ всѣ находиться въ одной плоскости, перпендикулярной къ той, на которую проэктируютъ сію прямую; изъ чего

и слѣдуетъ, что проэкціи всѣхъ точекъ сей прямой составятъ пресѣченіе сихъ двухъ плоскостей, то есть линію прямую; и такъ проэкція прямой линіи на какой ни есть плоскости есть линія прямая.

Для опредѣленія положенія прямой въ пространствѣ, проэктируютъ оную на плоскость координатъ, и отнеся проэкцію сей прямой къ осямъ, находящимся въ той плоскости, въ которой оная проэкція находится, имѣютъ ея уравненіе. Замѣтимъ, что такимъ образомъ для какой ни есть прямой въ пространствѣ, будемъ имѣть три уравненія ея проэкцій на плоскостяхъ координатъ, которыя и будутъ: для проэкціи на плоскости xz, отношеніе между неопредѣленными x и z первой степени; для проэкціи на плоскости yz отношеніе тойже степени между неопредѣленными y и z; и для проэкціи на плоскости xy отношеніе между неопредѣленными x и y той же степени. Для опредѣленія положенія прямой достаточно двухъ ея проэкцій; чтобы показать сіе геометрически представимъ себѣ, что чрезъ сіи проэкціи проведены плоскости, проэктирующія принадлежащую симъ двумъ проэкціямъ прямую; будемъ имѣть двѣ плоскости, изъ коихъ въ каждой будетъ находиться искомая прямая, а посему взаимное пресѣченіе сихъ плоскостей опредѣлитъ положеніе сей прямой.

Чтобы показать сіе аналитически, возмемъ проэкціи прямой на двухъ плоскостяхъ координатъ, напримѣръ на плоскостяхъ xz и yz; положимъ что уравненія оныхъ будутъ:

$$x = az + b, \text{ и } y = a'z + b';$$

поелику уравненіе проэкціи прямой на третьей плоскости xy есть отношеніе между координатами ея x и y на сей плоскости, то явно, что имѣя два уравненія между тремя неопредѣленными x, y и z, можемъ изключить изъ оныхъ z, и тогда получимъ отношеніе между x и y, которое будетъ уравненіемъ третьей проэкціи на плоскости xy. Произведя изчисленіе, получимъ:

$a'x = aa'z + a'b$, и $ay = aa'z + ab'$, откуда

$a'x - ay = a'b - ab'$, или $y = \frac{a'}{a}x + \frac{ab' - a'b}{a}$,

уравненіе проэкціи прямой на плоскости xy. Поелику тангенсъ угла составляемаго сею проэкціею съ осью x и разстояніе отъ начала координатъ до точки ея пресѣченія съ осью y, выражены въ величинахъ тангенсовъ и разстояній отъ начала входящихъ въ уравненія первыхъ двухъ проэкцій, то явно, что основываясь на семъ, мы можемъ всегда узнать будутъ ли или не будутъ данныя три проэкціи принадлежать тойже прямой.

Уравненія: $x = az + b$, и $y = a'z + b'$, опредѣляющія положеніе прямой въ пространствѣ, называются *общими уравненіями прямой.*

Когда данная прямая проходитъ чрезъ начало координатъ, проэкціи оной должны также пройти чрезъ сіе начало, почему получимъ: $b=0$, и $b'=0$, и общія уравненія прямой, проходящей чрезъ начало координатъ будутъ: $x=az$, $y=a'z$.

Замѣтимъ, что уравненіе $x=az+b$ не заключаетъ въ себѣ неопредѣленнаго y, почему для сего уравненія y можетъ имѣть всевозможныя величины, и слѣдовательно, сіе уравненіе будетъ уравненіемъ плоскости, проведенной перпендикулярно къ плоскости xz, то есть будетъ уравненіемъ плоскости, проэктирующей на плоскость xz ту прямую, къ проэкціи которой оное принадлежитъ. Подобнымъ образомъ уравненіе $y=a'z+b'$ будетъ уравненіемъ плоскости, проэктирующей на плоскость yz ту прямую, которой проэкцію на сей плоскости оное уравненіе означаетъ.

Опредѣленіе положенія какой ни есть кривой линіи; уравненія кривой; что называется двоякою кривою линіею.

147) Кривая линія опредѣляется въ пространствѣ также ея проэкціями на плоскостяхъ координатъ. Перпендикуляры, проведенные чрезъ всѣ ея точки къ плоскости, на которую проэктируютъ сію кривую, составятъ цилиндрическую поверхность перпендикулярную къ сей плоскости; кривая пресѣченія сей цилиндрической поверхности съ сею плоскостію, будетъ составлена изъ проэкцій всѣхъ точекъ кривой въ пространствѣ; а посему будетъ проэкціею сей кривой на сей плоско-

сти. Сію проэкцію относятъ къ осямъ координатъ, принадлежащимъ той плоскости, въ которой оная находится, и тогда будутъ имѣть ея уравненіе; напримѣръ, на плоскости xz получимъ отношеніе между x и z, координатами какой ни есть точки предположенной кривой въ пространствѣ; на плоскости yz отношеніе между неопредѣленными y и z, и на плоскости xy отношеніе между неопредѣленными x и y. Сіи три отношенія будутъ уравненіями проэкцій сей кривой на соотвѣтствующихъ имъ плоскостяхъ координатъ.

Для опредѣленія кривой въ пространствѣ достаточно двухъ ея проэкцій, ибо предположимъ что чрезъ сіи двѣ проэкціи проведены два перпендикулярные къ плоскостямъ ихъ содержащимъ цилиндра; искомая кривая будетъ находиться въ тоже время на обоихъ сихъ цилиндрахъ, а потому будетъ кривою ихъ пресѣченія, которая и опредѣлена даннымъ положеніемъ сихъ цилиндровъ.

Чтобы показать сіе аналитически возмемъ проэкціи кривой на двухъ плоскостяхъ координатъ, напримѣръ на плоскостяхъ xz и yz; уравненія сихъ проэкцій будутъ вообще $\phi(x,z)=0$ и $f(y,z)=0$, гдѣ ϕ и f означаютъ какое ни есть соединеніе постоянныхъ количествъ съ перемѣнными x и z, и y и z. Изъ сихъ двухъ уравненій изключивъ z, получимъ уравненіе $F(x, y)=0$, то есть отношеніе между x и y,

координатами какой ни есть точки кривой въ пространствѣ, которое посему и будетъ уравненіемъ проэкціи сей кривой на третьей плоскости xy, координатъ.

Уравненія $\varphi(x, z)=0$, и $f(y, z)=0$, опредѣляющія положеніе кривой въ пространствѣ, называются *уравненіями сей кривой*.

Замѣтимъ, что уравненіе $\varphi(x, z)=0$ не заключаетъ въ себѣ ординаты y, и слѣдовательно для сего уравненія сія ордината можетъ имѣть всѣ возможныя величины, а посему сіе уравненіе, выражая свойство всякой точки, находящейся на прямомъ цилиндрѣ, проэктирующемъ на плоскость xz кривую линію, которой проэкціи сіе уравненіе принадлежитъ, будетъ уравненіемъ и сего цилиндра. Подобнымъ образомъ уравненіе $f(y, z)=0$, будетъ уравненіемъ прямаго цилиндра, коего основаніе на плоскости yz есть кривая представленная симъ уравненіемъ.

При опредѣленіи кривой въ пространствѣ по двумъ проэкціямъ оной, можетъ случиться, что соотвѣтствующія производящія двухъ проэктирующихъ оную цилиндровъ, или, что все равно, соотвѣтствующія различнымъ ея точкамъ координаты, пресѣкутся въ точкахъ не находящихся въ той же плоскости, а посему кривая, которой принадлежатъ сіи проэкціи, не будетъ находиться въ той же пло-

скости: таковыя кривыя линіи называются *двояко кривыми линіями.*

148) Показавъ общія уравненія прямой линіи въ пространствѣ, займемся выведеніемъ частныхъ ея уравненій. Положимъ, во первыхъ, что требуется вывести уравненія прямой, проходящей чрезъ данную точку. Уравненія прямой, проходящей чрезъ данную точку.

Для сего пусть α, $\mathfrak{C}$ и ε, представляютъ намъ координаты данной точки, щитающіяся на осяхъ x, y и z; общія уравненія прямой суть: $x = az + b$, $y = a'z + b'$, гдѣ a, b, a' и b' неопредѣлены.

Поелику данная точка должна находиться на искомой прямой, то между координатами сей точки будетъ существовать тоже отношеніе, какъ и между неопредѣленными координатами сей прямой, почему и получимъ условія вопроса:

$$\alpha = a\varepsilon + b, \text{ и } \mathfrak{C} = a'\varepsilon + b'.$$

Соединивъ сіи уравненія съ общими уравненіями, будемъ имѣть:

$$x - \alpha = a(z - \varepsilon) \text{ и } y - \mathfrak{C} = a'(z - \varepsilon),$$

уравненія прямой проходящей чрезъ данную точку.

Въ сихъ уравненіяхъ количества a и a' не опредѣлены, изъ чего и слѣдуетъ что сіи уравненія, а посему проэкціи искомой прямой, и слѣдовательно положеніе самой сей прямой

опредѣлено не будетъ; то есть, что существуетъ множество линій проходящихъ чрезъ данную точку.

Уравненія прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки.

149) Положимъ, что должно вывести уравненія прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки.

Для сего пусть α, $\mathfrak{C}$, и $\mathfrak{z}$, и α', $\mathfrak{C}'$ и $\mathfrak{z}'$ представляютъ намъ координаты данныхъ точекъ, параллельныя осямъ x, y и z; общія уравненія прямой линіи суть: $x=az+b$ и $y=a'z+b'$, гдѣ a, b, a' и b' должно опредѣлить изъ условій вопроса.

Точка, коей координаты суть α, $\mathfrak{C}$, и $\mathfrak{z}$ находится на искомой прямой, а по сему оныя должны удовлетворять уравненіямъ сей прямой, почему и получимъ условія:

$$\alpha = a\mathfrak{z} + b, \text{ и } \mathfrak{C} = a'\mathfrak{z} + b'.$$

Точка, коей координаты суть α', $\mathfrak{C}'$ и $\mathfrak{z}'$ находится на искомой прямой, почему и получимъ условія:

$$\alpha' = a\mathfrak{z}' + b, \text{ и } \mathfrak{C}' = a'\mathfrak{z}' + b'.$$

Изъ сихъ четырехъ условныхъ уравненій вопроса, опредѣлимъ величины a, a', b и b'; получимъ послѣдовательно:

$$\alpha - \alpha' = a(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'), \text{ откуда } a = \frac{\alpha - \alpha'}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'};$$

$$\mathfrak{C} - \mathfrak{C}' = a'(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'), \text{ ------ } a' = \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}'}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'};$$

$$b = \alpha - a\mathfrak{z} = \alpha - \frac{\alpha - \alpha'}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'}\mathfrak{z}, \text{ или } b = \frac{\alpha'\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'\alpha}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'};$$

$$b' = \mathfrak{C} - a'\mathfrak{z} = \mathfrak{C} - \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{C}'}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'}\mathfrak{z}, \text{ или } b' = \frac{\mathfrak{C}'\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'\mathfrak{C}}{\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'}.$$

Поставивъ найденныя величины для a, a', b и b' въ общія уравненія прямой, получимъ:

$$x = \frac{\alpha - \alpha'}{\varepsilon - \varepsilon'} z + \frac{\alpha'\varepsilon - \varepsilon'\alpha}{\varepsilon - \varepsilon'}, \text{ и}$$

$$y = \frac{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}'}{\varepsilon - \varepsilon'} z + \frac{\mathfrak{E}'\varepsilon - \varepsilon'\mathfrak{E}}{\varepsilon - \varepsilon'},$$

уравненія прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки. Сіи уравненія опредѣлены совершенно: первое означаетъ проэкцію прямой на плоскости xz, а второе на плоскости yz.

150) Вывести выраженіе разстоянія между двумя данными точками.

Выраженіе разстоянія между двумя данными точками.

Пусть α, $\mathfrak{E}$ и ε, и α', $\mathfrak{E}'$ и ε' означаютъ координаты, параллельныя осямъ x, y и z, двухъ данныхъ точекъ M и M′. Вообразимъ, что чрезъ прямую MM′ соединяющую данныя точки, и коей длина ищется, проведена плоскость MP′, проэктирующая сію прямую на плоскость xy, и пусть сей прямой проэкція будетъ PP′. Проведемъ чрезъ точку M прямую MS параллельную проэкціи PP′, до пресѣченія ея въ точкѣ S съ ординатою M′P′ ($= \varepsilon'$); прямая MS будетъ перпендикулярна къ M′P′, а по сему получимъ изъ треугольника MM′S, уравненіе:

Фиг. 48.

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MS}^2 + \overline{M'S}^2, \text{ или}$$

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MS}^2 + (\varepsilon' - \varepsilon)^2.$$

Замѣтимъ, что $MS = PP'$, а прямая PP' означаетъ на плоскости xy разстояніе между двумя точками P и P', коихъ координаты y и x суть $PN(=\beta)$ и $PN'(=\alpha)$, и $P'Q(=\beta')$ и $P'Q'(=\alpha')$; посему будемъ имѣть:

$$\overline{MS}^2 (= \overline{PP'}^2) = (\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2.$$

По введеніи найденнаго выраженія для MS въ выраженіе для $\overline{MM'}^2$, и по извлеченіи корня изъ вывода, получимъ:

$$MM' = \sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2 + (\gamma' - \gamma)^2},$$

выраженіе разстоянія между двумя данными точками.

Естьли означимъ MM' чрезъ неопредѣленное z и положимъ что α', β', γ', β, α и γ имѣютъ какія ни есть постоянныя величины, тогда получимъ:

$$z = \sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2 + (\gamma' - \gamma)^2},$$

общее выраженіе разстоянія между двумя точками въ пространствѣ.

Предположивъ, что одна изъ сихъ точекъ, напримѣръ M, совпадаетъ съ началомъ координатъ A, получимъ условія: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, и $\gamma = 0$; по введеніи оныхъ въ выраженіе z, будемъ имѣть:

$$z = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2},$$ общее выраженіе разстоянія точки до начала координатъ.

Естьли бы въ сіе послѣднее выраженіе поставили вмѣсто z постоянную величину, напримѣръ r, а вмѣсто α', β', и γ' перемѣнныя

x, y и z, когда бы получили, возвысивъ въ квадратъ, $x^2+y^2+z^2=r^2$. Замѣтимъ, что сіе уравненіе принадлежитъ всѣмъ точкамъ, отстоящимъ отъ начала координатъ на разстояніе r; естьли мы представимъ, что изъ начала координатъ, какъ изъ центра, радіусомъ r описанъ шаръ, то сіе уравненіе будетъ означать свойство всякой точки на поверхности сего шара, а посему и будетъ *уравненіемъ шара*, коего центръ въ началѣ координатъ.

151) Опредѣлить координаты точки пресѣченія двухъ данныхъ прямыхъ.

Опредѣлить координаты точки пресѣченія двухъ прямыхъ; и вывести условіе, при которомъ прямыя пресѣкутся.

Для сего пусть $x=mz+n$, $y=m'z+n'$, и $x=dz+l$, $y=d'z+l'$ представляютъ намъ уравненія двухъ данныхъ прямыхъ.

Естьли предположимъ, что сіи прямыя пресѣкаются, то точка ихъ пресѣченія должна находиться въ то же время на обѣихъ сихъ прямыхъ, а посему координаты сей точки должны удовлетворять уравненіямъ обѣихъ сихъ прямыхъ, почему, означивъ чрезъ x, y, и z координаты искомой точки пресѣченія, получимъ для сей точки уравненія:

$$x=mz+n, \quad \text{и} \quad x=dz+l,$$
$$y=m'z+n', \qquad y=d'z+l'.$$

Изъ сихъ четырехъ уравненій можемъ вывести величины для x, y и z, и притомъ условное уравненіе между постоянными m, n, m', n', d, l, d', и l', которое, будучи выведено при предположеніи, что сіи прямыя пресѣкаются,

покажетъ намъ условіе сего пресѣченія. Опредѣляя x, y и z, получимъ:

$$0 = (m-d)z + n - l, \text{ откуда } z = \frac{l-n}{m-d};$$

$$x = \frac{ml-mn}{m-d} + n; \text{ или } x = \frac{ml-nd}{m-d};$$

$$y = \frac{m'l-m'n}{m-d} + n', \text{ или } y = \frac{m'l-n'd}{m-d};$$

выраженія для координатъ точки пресѣченія двухъ данныхъ прямыхъ.

Поелику же имѣемъ также: $z = \frac{l'-n'}{m'-d'}$, то будетъ $\frac{l-n}{m-d} = \frac{l'-n'}{m'-d'}$, или $(m'-d')(l-n) - (l'-n')(m-d) = 0$, условное уравненіе при пресѣченіи двухъ прямыхъ.

Предположивъ, что $m = d$, и $m' = d'$, мы бы удовлетворили сему условному уравненію, слѣдственно при сихъ предположеніяхъ прямыя бы пересѣклись; но тогда выраженія для x, y и z, обращаются въ безконечныя, а посему показываютъ, что, въ семъ случаѣ, точка пресѣченія была бы удалена на безконечное пространство. (*)

Выраженіе косинуса угла, составляемаго между собою двумя прямыми.

152) Вывести выраженіе косинуса угла, составляемаго двумя прямыми между собою.

Пусть $x = mz + n$, $y = m'z + n'$ и $x = dz + l$; $y = d'z + l'$, представляютъ намъ уравненія двухъ

(*) Способъ, употребленный нами къ опредѣленію координатъ точки пресѣченія двухъ прямыхъ, можетъ быть приложенъ и къ какимъ ни есть линіямъ.

данныхъ прямыхъ. Проведемъ чрезъ начало координатъ прямыя онымъ параллельныя: ихъ уравненія будутъ $x = mz$; $y = m'z$, и $x = dz$, $y = d'z$; уголъ между сими послѣдними прямыми ослается тотъ же, какъ и между данными, но наши изчисленія при изысканіи выраженія для его косинуса будутъ простѣе.

Чтобы вывести сіе выраженіе, положимъ что описанъ изъ начала координатъ, радіусомъ равнымъ единицѣ, шаръ; уравненіе сего шара будетъ $y^2 + x^2 + z^2 = 1$; шаръ сей пресѣчетъ обѣ прямыя въ двухъ точкахъ, а плоскость оныя содержащую въ большемъ кругѣ. Означивъ координаты точки пресѣченія шара съ первою прямою чрезъ α, β и ε, и замѣчая, что для сей точки будутъ существовать въ то же время, какъ уравненіе шара, такъ и уравненія сей прямой, получимъ условія:

$$\alpha = m\varepsilon,\ \beta = m'\varepsilon,\ \text{и}\ \alpha^2 + \beta^2 + \varepsilon^2 = 1;$$

изъ сихъ уравненій будемъ имѣть:

$$\varepsilon^2(1 + m^2 + m'^2) = 1,\ \text{откуда}\ \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 + m'^2}};$$

а посему

$$\alpha = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2 + m'^2}},\ \text{и}\ \beta = \frac{m'}{\sqrt{1 + m^2 + m'^2}}.$$

Для точки пресѣченія шара съ другою прямою, уравненія: шара и сей прямой, будутъ существовать въ тоже время, а посему, означивъ координаты сей точки чрезъ α', β', и

ε', получимъ: $\alpha' = d\varepsilon'$, $\mathfrak{C}' = d'\varepsilon'$, и $\alpha'^2 + \mathfrak{C}'^2 + \varepsilon'^2 = 1$; изъ сихъ уравненій будемъ имѣть, какъ и предъ симъ:

$$\varepsilon' = \frac{1}{\sqrt{1 + d^2 + d'^2}},\quad \alpha' = \frac{d}{\sqrt{1 + d^2 + d'^2}},\text{ и } \mathfrak{C}' = \frac{d'}{\sqrt{1 + d^2 + d'^2}}.$$

Вообразимъ, что точки пресѣченія шара съ сими двумя прямыми, соединены прямою, которой длину между сими двумя точками означимъ чрезъ q; сія прямая будетъ хордою угла, выраженіе косинуса коего вывести должно; для длины сей прямой получимъ: (150)

$$q = \sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\mathfrak{C}' - \mathfrak{C})^2 + (\varepsilon' - \varepsilon)^2},$$

или, замѣчая что имѣемъ $\alpha'^2 + \mathfrak{C}'^2 + \varepsilon'^2 = 1$, и $\alpha^2 + \mathfrak{C}^2 + \varepsilon^2 = 1$, получимъ:

$$q = \sqrt{2 - 2(\alpha\alpha' + \mathfrak{C}\mathfrak{C}' + \varepsilon\varepsilon')}.$$

Поставивъ въ сіе выраженіе величины для α, α', $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, ε и ε' выведенныя нами, и возвысивъ выводъ въ квадратъ, получимъ:

$$q^2 = 2 - 2\,\frac{1 + md + m'd'}{\sqrt{1 + m^2 + m'^2}\,\sqrt{1 + d^2 + d'^2}}.$$

Отношеніе между хордою и косинусомъ угла, который означимъ чрезъ A, есть: (22)

$\cos. A = 1 - \frac{q^2}{2}$; по вставленіи вмѣсто q^2 выведенной величины, и по сокращеніи, получимъ:

$$\cos. A = \frac{1 + md + m'd'}{\sqrt{1 + m^2 + m'^2}\,\sqrt{1 + d^2 + d'^2}},$$

выраженіе косинуса угла, составляемаго между собою двумя прямыми.

153) Чтобы найти выраженія для косинусовъ угловъ составляемыхъ прямою съ осями координатъ, возмемъ въ разсужденіе напримѣръ прямую, коей уравненія суть: $x = mz$, $y = m'z$, и будемъ полагать поперемѣнно, что другая прямая совпадаетъ съ осями координатъ; условія сего совпаденія будемъ вводить въ выраженіе, выведенное нами для косинуса угла составляемаго двумя прямыми.

Выраженія косинусовъ угловъ, составляемыхъ данною прямою съ осями координатъ.

Уравненія другой прямой суть $x = dz$, $y = d'z$ .....(152); и такъ положимъ, что сія прямая совпадаетъ съ осью x; уравненія сей оси суть $y = 0$, и $z = 0$; поелику $y = 0$, будетъ $d' = 0$, притомъ проэкція прямой на плоскости zx будетъ составлять тогда съ осью z уголъ прямой, слѣдовательно получимъ $d = \frac{1}{0}$. Введя сіи два условія, сперва первое, потомъ второе, въ выраженіе косинуса, придавъ оному видъ:

$$\cos. A = \frac{\frac{1}{d} + m + \frac{m'd'}{d}}{\sqrt{1+m^2+m'^2}.\sqrt{\frac{1}{d^2}+1+\frac{d'^2}{d^2}}}$$

получимъ, по означеніи чрезъ φ угла, составляемаго прямою съ осью x, выраженіе:

$$\cos. \varphi = \frac{m}{\sqrt{1+m^2+m'^2}}.$$

Положимъ, что другая прямая совпадаетъ съ осью y; уравненія сей оси суть $x = 0$, и

$z = 0$; поелику $x = 0$, будетъ $d = 0$, притомъ проэкція прямой на плоскости yz будетъ составлять тогда съ осью z уголъ прямой, а посему получимъ $d' = \frac{1}{0}$. Введя сіи условія поперемѣнно, сперва первое, потомъ второе, въ выраженіе *cos.* A, придавъ оному видъ:

$$cos.\ A = \frac{1 + \frac{m\,d}{d'} + m'}{\sqrt{1 + m^2 + m'^2}.\sqrt{\frac{1}{d'^2} + \frac{d^2}{d'^2} + 1}}$$

получимъ, по означеніи чрезъ ψ угла, составляемаго прямою съ осью y, выраженіе:

$$cos.\ \psi = \frac{m'}{\sqrt{1 + m^2 + m'^2}}.$$

Положимъ, что прямая совпадаетъ съ осью z; уравненія сей оси суть $x = 0$ и $y = 0$; почему получимъ $d = 0$, и $d' = 0$; введя сіи условія въ выраженіе *cos.* A, по означеніи чрезъ ω угла, составляемаго прямою съ осью z, получимъ:

$$cos.\ \omega = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 + m'^2}}.$$

Замѣтимъ, что взявъ сумму квадратовъ найденныхъ косинусовъ, получимъ:

$$cos.^2\ \varphi + cos.^2\ \psi + cos.^2\ \omega = 1;$$

условное уравненіе между косинусами угловъ, составляемыхъ съ осями координатъ тою же прямою; сіе уравненіе показываетъ, что двумя токмо изъ трехъ угловъ φ, ψ и ω располагать можно.

154) Поелику весьма часто задается положеніе прямой въ пространствѣ углами, которые сія прямая составляетъ съ осями координатъ, то мы и покажемъ видъ уравненій оной, когда будутъ введены въ сіи уравненія сіи углы.

Уравненія прямой по введеніи въ оныя угловъ, составляемыхъ сею прямою съ осями координатъ.

Для сего возмемъ уравненія $x = mz$, $y = m'z$ прямой, которой углы съ осями x, y и z означили мы чрезъ φ, ψ и ω; возмемъ также выраженія для косинусовъ сихъ угловъ:

$$\cos.\varphi = \frac{m}{\sqrt{1+m^2+m'^2}}, \quad \cos.\psi = \frac{m'}{\sqrt{1+m^2+m'^2}}, \quad \cos.\omega = \frac{1}{\sqrt{1+m^2+m'^2}}.$$

Изъ сихъ выраженій получимъ: $\frac{\cos.\varphi}{\cos.\omega} = m$; и $\frac{\cos.\psi}{\cos.\omega} = m'$; почему уравненія прямой обратятся въ

$$x = \frac{\cos.\varphi}{\cos.\omega} z, \text{ и } y = \frac{\cos.\psi}{\cos.\omega} z, \text{ или}$$

$x \cos.\omega = z \cos.\varphi$; и $y \cos.\omega = z \cos.\psi$, уравненія проэкцій прямой, на плоскостяхъ xz и yz; отсюда удобно найти уравненіе ея проэкціи на плоскости xy, изключивъ z изъ сихъ двухъ уравненій; произведя изчисленіе, получимъ:

$y \cos.\omega \cos.\varphi - x \cos.\omega \cos.\psi = 0$, откуда

$y \cos.\varphi = x \cos.\psi$, уравненіе проэкціи на плоскости xy. Сіи уравненія легко можно удержать въ памяти, замѣтивъ, что въ уравненіе проэкціи прямой на какой ни есть

плоскости координатъ, входятъ косинусы угловъ составляемыхъ прямою съ осями сей плоскости, и притомъ такъ, что косинусъ угла, принадлежащаго одной оси, множится на координату другой, и обратно.

Естьли положимъ, что Φ', Ψ' и ω' представляютъ намъ углы, составляемые съ осями x, y и z другою прямою, коей уравненія суть $x = dz$, $y = d'z$, то получимъ, подобнымъ предъидущему образомъ, для сей прямой:

$$\frac{cos.\,\Phi'}{cos.\,\omega'} = d, \text{ и } \frac{cos.\,\Psi'}{cos.\,\omega'} = d'.$$

Введя величины для m, m', d и d', въ конусахъ угловъ, составляемыхъ прямыми съ осями координатъ, въ выраженіе $cos.$ A, косинуса угла составляемаго сими двумя прямыми, получимъ:

$$cos.\,A = \frac{1 + \frac{cos.\,\Phi\,cos.\,\Phi'}{cos.\,\omega\,cos.\,\omega'} + \frac{cos.\,\Psi\,.\,cos.\,\Psi'}{cos.\,\omega\,.\,cos.\,\omega'}}{\sqrt{1+\frac{cos.^2\Phi}{cos.^2\omega}+\frac{cos.^2\Psi}{cos.^2\omega}}\,\sqrt{1+\frac{cos.^2\Phi'}{cos.^2\omega'}+\frac{cos.^2\Psi'}{cos.^2\omega'}}}.$$

Сіе выраженіе, по сокращеніи, и замѣтивъ, что имѣемъ (153) условное уравненіе $cos.^2\Phi + cos.^2\Psi + cos.^2\omega = 1$, а посему и $cos.^2\Phi' + cos.^2\Psi' + cos.^2\omega' = 1$, обратится въ $cos.\,A = cos.\,\omega\,.\,cos.\,\omega' + cos.\,\Phi\,.\,cos.\,\Phi' + cos.\,\Psi\,.\,cos.\,\Psi'$; выводъ примѣчательный по его симетрическому виду.

Условія перпендикулярности и параллельности двухъ прямыхъ.

155) Взявъ въ разсужденіе выраженіе выведенное нами въ § 152, для косинуса угла, составляемаго между собою двумя прямыми, легко можно вывести условія, которымъ должны удовлетворять постоянныя величины, входящія въ уравненія двухъ прямыхъ, чтобы сіи прямыя были перпендикулярны между собою, или параллельны.

Въ случаѣ когда двѣ прямыя перпендикулярны, косинусъ угла оными составляемаго равенъ нулю, почему и получимъ:

$$1 + m\,d + m'd' = 0,$$

условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ. Замѣтимъ, что сіе условіе совершенно различно отъ условія выведеннаго нами въ § 151, которое должно быть удовлетворено, чтобы двѣ прямыя пресѣкались, изъ чего и слѣдуетъ, что въ пространствѣ двѣ прямыя могутъ быть взаимно перпендикулярны, хотя и не будутъ пресѣкаться.

Въ случаѣ когда двѣ прямыя параллельны, уголъ составляемый оными равенъ нулю, а посему косинусъ сего угла равенъ единицѣ, и мы получимъ условіе параллельности двухъ прямыхъ:

$$1 = \frac{1 + m\,d + m'\,d'}{\sqrt{1+m^2+m'^2}.\sqrt{1+d^2+d'^2}};$$

уничтоживъ знаменателя, возвысивъ обѣ части въ квадратъ, и развернувъ выводъ, можемъ придать оному видъ:

$$(m-d)^2+(m'-d')^2+(md'-dm')^2=0.$$

Сумма трехъ квадратовъ не иначе можетъ быть равна нулю, какъ когда каждый изъ оныхъ будетъ равенъ нулю; то есть, чтобы удовлетворить сему уравненію, должно положить:

$$m=d,\ m'=d',\ \text{и}\ md'=dm'.$$

Третіе условіе выводится изъ двухъ первыхъ, почему мы и возмемъ въ разсужденіе токмо два первыя; оныя означаютъ, что погда проэкціи прямыхъ на соотвѣтствующихъ плоскостяхъ координатъ, будутъ параллельны между собою. Изъ чего и усматриваемъ, что когда прямыя параллельны, то проэкціи сихъ прямыхъ на тѣхъ же плоскостяхъ координатъ будутъ также параллельны между собою.

Уравненія прямой параллельной данной, и проходящей чрезъ данную точку.

156) Вывести уравненія прямой параллельной данной и проходящей чрезъ данную точку.

Пусть α, β и γ представляютъ намъ координаты данной точки, а $x=mz+n$, $y=m'z+n'$ уравненія данной прямой; общія уравненія прямой суть: $x=az+b$, $y=a'z+b'$, гдѣ a, b, a' и b' должны быть опредѣлены изъ условій вопроса.

Точка, коей координаты α, β и γ, должна находиться на искомой прямой, почему ея ко-

ординаты будутъ удовлетворять уравненію сей прямой, и мы получимъ условія: $\alpha = a\varepsilon + b$ и $\mathfrak{C} = a'\varepsilon + b'$.

Искомая прямая должна быть параллельна данной, посему проэкціи искомой прямой должны быть параллельны проэкціямъ данной прямой на соотвѣтствующихъ плоскостяхъ координатъ, и слѣдственно получимъ еще условія вопроса:

$$a = m, \text{ и } a' = m'.$$

Соединивъ первыя два условія съ общими уравненіями, получимъ:

$$x - \alpha = a(z - \varepsilon) \text{ и } y - \mathfrak{C} = a'(z - \varepsilon);$$

введя въ сіи уравненія два оспальныя условія вопроса, то есть написавъ въ оныхъ вмѣсто a и a' данныя величины m и m', получимъ:

$$x - \alpha = m(z - \varepsilon), \text{ и } y - \mathfrak{C} = m'(z - \varepsilon),$$

уравненія прямой, параллельной данной, и проходящей чрезъ данную точку.

Выраженіе кратчайшаго разстоянія между двумя данными прямыми.

157) Предложимъ вопросъ вывести выраженіе для кратчайшаго разстоянія между двумя данными прямыми.

Извѣстно, что въ пространствѣ прямыя могутъ не пресѣкаться и не быть параллельны; часть прямой перпендикулярной въ тоже время къ обѣимъ таковымъ прямымъ, заключающаяся между точками ея пресѣченія съ сими прямыми, называется *кратчайшимъ раз-*

стояніемъ между оными. Явно, что когда данныя прямыя пресѣкаются, то кратчайшее разстояніе между оными равно нулю.

Пусть $x = mz + n$, $y = m'z + n'$ и $x = dz + l$, $y = d'z + l'$ представляютъ намъ уравненія двухъ данныхъ прямыхъ; въ сихъ уравненіяхъ m, n, m', n', d, l, d' и l' будутъ даны.

Положимъ, что уравненія прямой, перпендикулярной въ тоже время къ обѣимъ даннымъ и ихъ пресѣкающей, будутъ $x = pz + q$ и $y = p'z + q'$; въ сихъ уравненіяхъ величины p, q, p' и q' должны быть опредѣлены изъ условныхъ уравненій:

$$\left.\begin{array}{l}(m'-p)\,(q-n)-(q'-n')\,(m-p) = 0;\\ (d'-p')\,(q-l)-(q'-l')\,(d-p) = 0;\end{array}\right\}\ldots\ldots(151)$$

$$\left.\begin{array}{l}1 + mp + m'p' = 0;\\ 1 + dp + d'p' = 0;\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(155)$$

первыя два изъ сихъ уравненій показываютъ, что предложенная нами прямая пресѣкаетъ обѣ данныя, а два остальныя, что оная перпендикулярна къ обѣимъ даннымъ прямымъ.

Положимъ, что координаты точки пресѣченія сего перпендикуляра съ обѣими прямыми суть: съ первою прямою x', y' и z', а съ второю x'', y'' и z''.

Поелику точка, коей координаты x', y' и z', находится въ тоже время какъ на первой прямой, такъ и на перпендикулярѣ, то

для опредѣленія координатъ сей точки получимъ уравненія:

$$x' = mz' + n; \quad x' = pz' + q;$$
$$y' = m'z' + n'; \quad \text{и} \quad y' = p'z' + q'.$$

Изъ сихъ четырехъ уравненій опредѣлимъ x', y' и z', и притомъ еще условное уравненіе, которому мы уже удовлетворили, для пресѣченія перпендикуляра съ первою прямою; замѣтимъ, что величины x', y', z', будутъ выражены въ предстоящихъ уравненій двухъ данныхъ прямыхъ, ибо p, p' и q, q', какъ мы показали, опредѣлены въ сихъ предстоящихъ.

Такимъ же образомъ для опредѣленія координатъ x'', y'', z'' точки пресѣченія перпендикуляра съ второю прямою, получимъ уравненія:

$$x'' = dz'' + l; \quad x'' = pz'' + q;$$
$$y'' = d'z'' + l'; \quad \text{и} \quad y'' = p'z'' + q';$$

изъ сихъ четырехъ уравненій опредѣлимъ величины для x'', y'', z'' и притомъ условное уравненіе, чтобы перпендикуляръ пресѣкалъ вторую данную прямую; здѣсь также x'', y'', z'' будутъ выражены въ предстоящихъ уравненій данныхъ прямыхъ.

Поставивъ такимъ образомъ опредѣленныя величины для x', y', z' и x'', y'', z'' въ выраженіе разстоянія между двумя точками, которое здѣсь перемѣнится въ

$$Q = \sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2},$$

получимъ величину Q, которая будетъ уже искомымъ кратчайшимъ разстояніемъ между двумя данными прямыми, выраженную въ данныхъ предстоящихъ d, l, d', l', m, n, m', n'; а посему сіе кратчайшее разстояніе будетъ опредѣлено совершенно.

О ПЛОСКОСТИ И ПЕРЕМѢНѢ КООРДИНАТЪ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

Общее уравненіе плоскости.

158) Уравненіемъ какой ни есть поверхности, а потому и плоскости, называется отношеніе, существующее между координатами какой ни есть точки, находящейся на сей поверхности. Поелику сія какая ни есть точка находится на поверхности, то отношеніе между координатами сей точки должно выражать свойство сей поверхности. Плоскость имѣетъ многія особенныя свойства, отличающія оную отъ другихъ поверхностей, изъ чего и слѣдуетъ, что существуютъ многіе способы находить уравненіе плоскости; мы предложимъ здѣсь два изъ оныхъ.

1 *Способъ.* Плоскость есть поверхность, которой можно дать такое положеніе между двумя неподвижными точками, что разстоянія всякой ея точки до сихъ неподвижныхъ точекъ будутъ равны между собою.

Пусть α, $\mathfrak{B}$, γ, и α', $\mathfrak{B}'$, γ' означаютъ координаты двухъ неподвижныхъ точекъ, соот-

вѣтствующія осямъ x, y, z; координаты какой ни есть точки, предположенной на плоскости означутся чрезъ x, y, и z; замѣтимъ, что α, β, ε, α', β', ε' суть какія ни есть постоянныя величины.

Разстояніе между первою неподвижною точкою и какою ни есть точкою на плоскости будетъ выражено, какъ мы уже видѣли, чрезъ

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\varepsilon)^2}.$$

Разстояніе второй неподвижной точки отъ той же, какой ни есть точки на плоскости, будетъ:

$$\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+(z-\varepsilon')^2}.$$

По свойству плоскости сіи разстоянія равны между собою, почему и получимъ:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\varepsilon)^2}=\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+(z-\varepsilon')^2};$$

возвысивъ обѣ части сего уравненія въ квадратъ, развернувъ и сокративъ, можемъ придать оному слѣдующій видъ:

$$2(\alpha'-\alpha)x+2(\beta'-\beta)y+2(\varepsilon'-\varepsilon)z$$
$$=\alpha'^2+\beta'^2+\varepsilon'^2-\alpha^2-\beta^2-\varepsilon^2, \text{ или,}$$

положивъ для краткости $2(\alpha'-\alpha)=A$, $2(\beta'-\beta)=B$, $2(\varepsilon'-\varepsilon)=C$, и $\alpha'^2+\beta'^2+\varepsilon'^2-\alpha^2-\beta^2-\varepsilon^2=D$, получимъ:

$Ax+By+Cz=D$, *общее уравненіе пло-*

скости, въ которомъ A, B, C и D, суть какія ни есть постоянныя величины.

Естьли плоскость проходитъ чрезъ начало координатъ, тогда координаты сего начала $x=o$, $y=o$, и $z=o$, должны удовлетворять уравненію плоскости, почему тогда получимъ: $D=o$; и такъ $Ax+By+Cz=o$, будетъ уравненіемъ плоскости, проходящей чрезъ начало координатъ.

2 *Слособъ.* Всѣ прямыя возставленныя изъ какой ни есть точки на прямой, перпендикулярно къ оной, составятъ поверхность, называемую плоскостію.

Пусть α, β, γ, суть координаты какой ни есть точки на прямой, коей уравненія будутъ:

$x-\alpha=a(z-\gamma)$ и $y-\beta=b(z-\gamma)$, гдѣ a, b, α, β и γ, суть какія ни есть постоянныя величины.

Уравненія прямой перпендикулярной къ сей прямой и проходящей чрезъ точку на сей послѣдней, будутъ:

$$x-\alpha=a'(z-\gamma), \text{ и } y-\beta=b'(z-\gamma).$$

Въ уравненіяхъ сихъ двухъ прямыхъ тангенсы a, b, a', b' должны удовлетворять условію взаимной перпендикулярности двухъ прямыхъ въ пространствѣ; то есть получимъ между сими тангенсами уравненіе:

$$1+aa'+bb'=o \ldots\ldots\ldots (155).$$

Въ семъ послѣднемъ уравненіи a' и b' будутъ постоянны для того же перпендикуляра, и измѣняться для различныхъ перпендикуляровъ, изъ чего и слѣдуетъ, что поставивъ вмѣсто a' и b' въ сіе уравненіе, величины оныхъ выраженныя въ перемѣнныхъ x, y и z, и извлеченныя изъ уравненія перпендикуляра, получимъ уравненіе, которое будетъ принадлежать всѣмъ симъ перпендикулярамъ, а посему плоскости ихъ содержащей. Изъ уравненій перпендикуляра имѣемъ:

$$a' = \frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \text{ и } b' = \frac{y-\beta}{z-\gamma};$$

Поставивъ сіи величины въ условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ, получимъ:

$$1 + a\frac{x-\alpha}{z-\gamma} + b\frac{y-\beta}{z-\gamma} = 0; \text{ или}$$

$z-\gamma+a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0$, общее уравненіе плоскости. Сіе уравненіе можетъ принять видъ:

$z+ax+by=a\alpha+b\beta+\gamma$, или, по положеніи $a=\frac{A}{C}$, $b=\frac{B}{C}$, и $a\alpha+b\beta+\gamma=\frac{D}{C}$, получимъ: $Ax+By+Cz=D$, видъ, который предъ симъ имѣли.

Когда плоскость проходитъ чрезъ начало координатъ, тогда $\alpha=0$, $\beta=0$, и $\gamma=0$, почему и получимъ $a\alpha+b\beta+\gamma=D=0$, и уравненіе обратится въ

$$Ax+By+Cz=0.$$

Замѣтимъ, что общее уравненіе плоскости $Ax+By+Cz=D$ есть общее уравненіе первой степени о трехъ перемѣнныхъ.

Уравненія слѣдовъ плоскости; условіе когда прямая перпендикулярна къ плоскости.

159) Прямыя пресѣченія какой ни есть плоскости съ плоскостями координатъ называются *слѣдами* оной на сихъ плоскостяхъ; явно что для опредѣленія положенія плоскости достаточно двухъ слѣдовъ оной.

Чтобы вывести уравненія слѣдовъ какой ни есть плоскости, напримѣръ представленной вообще уравненіемъ $Ax+By+Cz=D$, положимъ, что требуется опредѣлить уравненіе слѣда сей плоскости на плоскости координатъ xz; замѣтимъ, что для сего слѣда будемъ имѣть въ тоже время уравненія: плоскости xz, которое есть $y=0$, и данной плоскости $Ax+By+Cz=D$; соединивъ сіи два уравненія получимъ:

$$Ax+Cz=D, \text{ или } x=-\frac{C}{A}z+\frac{D}{A},$$

уравненіе слѣда на плоскости xz.

Для слѣда на плоскости yz будутъ существовать въ тоже время уравненія: $x=0$ и $Ax+By+Cz=D$; соединивъ оныя получимъ:

$$By+Cz=D, \text{ или } y=-\frac{C}{B}z+\frac{D}{B},$$

уравненіе слѣда на плоскости yz.

Для слѣда на плоскости xy будемъ имѣть уравненія: $z=0$ и $Ax+By+Cz=D$, откуда:

$A x + B y = D$; или $y = -\frac{A}{B} x + \frac{D}{B}$, уравненіе слѣда на плоскости $x y$.

Взявъ въ разсужденіе уравненія слѣдовъ на плоскостяхъ $z y$ и $x y$ положимъ въ оныхъ: въ первомъ $z = 0$, а во второмъ $x = 0$, для опредѣленія точекъ пресѣченія сихъ слѣдовъ съ осью y; получимъ изъ перваго $y = \frac{D}{B}$, ординату точки пресѣченія съ осью y слѣда на плоскости $y z$, и изъ втораго $y = \frac{D}{B}$ ординату точки пресѣченія съ тою же осью слѣда на плоскости $x y$. Поелику величины y для обѣихъ сихъ точекъ тѣже, то изъ сего и слѣдуетъ, что слѣды той же плоскости на двухъ какихъ ни есть плоскостяхъ координатъ, встрѣчаютъ въ той же точкѣ ось пресѣченія сихъ плоскостей.

Положивъ попеременно $y = 0$, и $x = 0$ въ уравненіи плоскости $z - \varepsilon + a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0$..... (158), поелику для плоскости $x z$ координата $\beta = 0$, а для плоскости $y z$ координата $\alpha = 0$, получимъ:

$z - \varepsilon + a(x - \alpha) = 0$ уравненіе слѣда на плоскости $x z$;

и $z - \varepsilon + b(y - \beta) = 0$, уравненіе слѣда на плоскости $y z$;

сіи уравненія могутъ принять видъ:

$x - \alpha = -\frac{1}{a}(z - \varepsilon)$, и $y - \beta = -\frac{1}{b}(z - \varepsilon)$.

Сравнивъ сіи уравненія съ уравненіями проэк-

ціи прямой $x-\alpha=a(z-\varepsilon)$ и $y-\beta=b(z-\varepsilon)$..... (158), на тѣхъ же плоскостяхъ координатъ, усматриваемъ, что тангенсы $-\frac{1}{a}$ и a, тангенсы $-\frac{1}{b}$ и b, удовлетворяютъ попеременно по два, уравненію $1+a'a''=0$, перпендикулярности двухъ прямыхъ на плоскости. Изъ чего и заключимъ, замѣтивъ, что вторая прямая предположена перпендикулярною къ плоскости, уравненія слѣдовъ коей мы вывели, что, когда прямая перпендикулярна къ плоскости, то проэкціи ея перпендикулярны къ слѣдамъ сей плоскости, взятымъ на тѣхъ же плоскостяхъ координатъ, на которыхъ находятся сіи проэкціи.

По даннымъ слѣдамъ плоскости построить какую ни есть точку на оной, и притомъ вывести уравненіе сей плоскости.

160) Когда даны два слѣда плоскости на какихъ ни есть плоскостяхъ координатъ, то можно всегда построить столько точекъ на сей плоскости находящихся сколько нужно будетъ, и притомъ вывести уравненіе оной.

Фиг. 49.

Примемъ въ разсужденіе слѣды на плоскостяхъ xz и yz, коихъ уравненія пусть будутъ $z=ax+b$, и $z=cy+b$; здѣсь b должно быть тоже въ обѣихъ уравненіяхъ по условію, которое мы показали въ § 159.

Пусть прямыя OB и OB′ проведенныя въ плоскостяхъ xz и yz представляютъ намъ слѣды плоскости, коихъ уравненія даны; тогда *tang.* BOK $=a$, AO $=b$, и *tang.* B′OP′ $=c$. Возмемъ для x и y какія-ни есть величины AL

и A P″, тогда прямая O″G перпендикулярная къ плоскости xy, возставленная изъ точки O″, коей координаты на сей плоскости суть AL(=x) и AP″(=y), покажетъ намъ направленіе ординаты z; чтобы точка соотвѣтствующая произвольнымъ координатамъ x и y находилась на плоскости, должно опредѣлить соотвѣтствующую имъ величину z для точки находящейся въ сей плоскости. Для сего чрезъ прямую GO″ проведемъ плоскости P″G и LG, параллельныя плоскостямъ zx и zy; прямыя пресѣченія сихъ плоскостей съ плоскостями zy и zx будутъ P″P′B′ и LKB, параллельныя прямой GO″. Проведемъ изъ точки пресѣченія B′ одной изъ сихъ прямыхъ P″P′ съ слѣдомъ OB′, находящимся съ оною въ той же плоскости yz, прямую параллельно другому данному слѣду OB; сія прямая, находясь въ той же плоскости P″G съ прямою O″G, пресѣчетъ оную въ точкѣ G, которая и будетъ находиться въ плоскости B′OB, ибо находится на прямой B′G, которая проведена чрезъ точку B′ въ сей плоскости параллельно прямой OB, слѣду сей плоскости. Послѣ чего можно уже будетъ опредѣлить и уравненіе плоскости, данной ея слѣдами OB и OB′, ибо, поелику построенная точка G находится въ сей плоскости, то ордината ея O″G должна имѣть такую величину z, что отношеніе между оною и величинами x и y, соотвѣтствую-

щими той точкѣ G, должно быть уравненіемъ плоскости, на которой сія точка находится, то есть коей слѣды даны.

Чтобы вывести сіе отношеніе проведемъ въ плоскости GL прямыя BO''', и KO' параллельныя Ay, и потомъ прямыя $P'O'''$ и $P'O'$. Тогда ордината $GO''(=z)$ раздѣлится на три части: GO''', $O'''O'$, и $O'O''$; почему и получимъ: $z=GO'''+O'''O'+O'O''$. Но $GO'''=B'P'=cy$, $O'''O'=BK=ax$, и $O'O''=P''P'=AO=b$, почему, по вставленіи сихъ величинъ въ выраженіе z, получимъ:

$z=ax+cy+b$, уравненіе плоскости данной двумя ея слѣдами.

Когда плоскость проходитъ чрезъ начало координатъ, ея слѣды должны пройти также чрезъ сіе начало, почему получимъ условіе $b=0$, и уравненія слѣдовъ будутъ $z=ax$, $z=cy$, а уравненіе плоскости $z=ax+cy$.

Явно, что по всеобщности предстоящихъ a, c, и b, уравненіе плоскости, выведенное нами, можетъ принять видъ: $Ax+By+Cz=D$, или, естьли плоскость проходитъ чрезъ начало, то $Ax+By+Cz=0$.

О числѣ условій, необходимомъ для опредѣленія положенія плоскости

161) Общее уравненіе плоскости $Ax+By+Cz=D$, можетъ принять не теряя его всеобщности видъ $z+Mx+Ny=L$, когда по раздѣленіи всѣхъ членовъ онаго на C, положимъ

$$\frac{A}{C}=M,\ \frac{B}{C}=N,\ \text{и}\ \frac{D}{C}=L.$$

Взявъ въ разсужденіе уравненіе $z + Mx + Ny = L$ усматриваемъ, что въ оное входятъ три предстоящихъ M, N, и L; отъ опредѣленія сихъ предстоящихъ зависитъ опредѣленіе уравненія, а посему и положенія представленной онымъ плоскости. Для опредѣленія предстоящихъ M, N и L потребно три условія, изъ чего и заключимъ, что для опредѣленія положенія плоскости, вообще, потребно три условія. И такъ положимъ, что требуется вывести уравненіе плоскости, проходящей чрезъ три данныя точки.

вообще, уравненіе плоскости, проходящей чрезъ три данныя точки.

Для сего пусть α, $\mathfrak{C}$, ε и α', $\mathfrak{C}'$, ε' и α'', $\mathfrak{C}''$, ε'' представляютъ намъ координаты трехъ данныхъ точекъ, параллельныя осямъ x, y, z; общее уравненіе плоскости есть $z + Mx + Ny = L$, гдѣ M, N, и L должно опредѣлить изъ условій вопроса.

Поелику три данныя точки находятся на искомой плоскости, то координаты сихъ трехъ точекъ должны удовлетворять, для каждой точки, уравненію сей плоскости, почему и получимъ слѣдующія три условія вопроса:

$$\varepsilon + M\alpha + N\mathfrak{C} = L,$$
$$\varepsilon' + M\alpha' + N\mathfrak{C}' = L,$$
$$\varepsilon'' + M\alpha'' + N\mathfrak{C}'' = L.$$

Изъ сихъ трехъ условій вопроса опредѣлимъ величины для трехъ предстоящихъ M, N, и L; поставимъ сіи величины въ уравненіе

$+ x + Ny = L$; тогда оное будетъ уравненіемъ искомой плоскости, проходящей чрезъ три данныя точки, и будетъ опредѣлено совершенно, ибо M, N и L въ ономъ будутъ выражены въ данныхъ координатахъ трехъ точекъ.

Уравненіе плоскости, перпендикулярной къ данной прямой, и проходящей чрезъ данную точку.

162) Положимъ, что предложено вывести уравненіе плоскости, перпендикулярной къ данной прямой и проходящей чрезъ данную точку.

Для сего пусть $x = az + ', y = a'z + b'$ представляютъ намъ уравненія данной прямой, а α, β, γ координаты данной точки, параллельныя осямъ x, y, z; общее уравненіе плоскости есть $z + Mx + Ny = L$.

Поелику плоскость должна быть перпендикулярна къ данной прямой, то слѣды ея должны быть перпендикулярны къ проэкціямъ сей прямой на тѣхъ же плоскостяхъ координатъ (159). Чтобы получить слѣды искомой плоскости, положимъ поперемѣнно въ предположенномъ ея уравненіи $y = o$, и $x = o$; будемъ имѣть:

$x = -\frac{1}{M}z + \frac{L}{M}$, уравненіе слѣда на плоскости xz;

и $y = -\frac{1}{N}z + \frac{L}{N}$, — — — — — — — — — yz.

Чтобы сіи слѣды были перпендикулярны къ проэкціямъ прямой на тѣхъ же плоскостяхъ координатъ, получимъ условія:

$1 - \frac{a}{M} = 0$, и $1 - \frac{a'}{N} = 0$; сіи условія будутъ двумя условіями вопроса, изъ которыхъ выведя величины для M и N, получимъ:

$$M = a, \text{ и } N = a'.$$

Точка, коей координаты α, β, и γ должна находиться на искомой плоскости, почему координаты ея будутъ удовлетворять уравненію сей плоскости, и слѣдовательно получимъ:

$\gamma + M\alpha + N\beta = L$, третіе условіе вопроса.

Соединивъ сіе условіе съ общимъ уравненіемъ плоскости, будемъ имѣть:

$$z - \gamma + M(x - \alpha) + N(y - \beta) = 0,$$

уравненіе плоскости проходящей чрезъ данную точку. Чтобы сія плоскость была перпендикулярна къ данной прямой, поставимъ въ ея уравненіе вмѣсто M и N опредѣленныя нами для оныхъ величины; получимъ:

$$z - \gamma + a(x - \alpha) + a'(y - \beta) = 0,$$

уравненіе плоскости перпендикулярной къ данной прямой, и проходящей чрезъ данную точку.

163) Положимъ, что предложено вывести уравненіе прямой пресѣченія двухъ данныхъ плоскостей.

Уравненія прямой пресѣченія двухъ данныхъ плоскостей, и условіе,

Пусть $z + Mx + Ny = L$, и $z + Mx + N'y = L'$, представляютъ намъ уравненія двухъ данныхъ плоскостей.

когда плоскости не пресѣкутся.

Для прямой пресѣченія двухъ данныхъ плоскостей, сіи ихъ уравненія будутъ существовать въ тоже время, ибо какая ни есть точка сей прямой будетъ находиться въ тоже время на обѣихъ плоскостяхъ, а по сему ея координаты должны имѣть между собою отношеніе общее обѣимъ симъ плоскостямъ:

$$z + Mx + Ny = L, \text{ и } z + M'x + N'y = L';$$

изключивъ изъ сихъ уравненій z, будемъ имѣть:

$$(M - M')\,x + (N - N')\,y = L - L', \text{ или}$$

$$y = \frac{M'-M}{N-N'}\,x + \frac{L-L'}{N-N'} \text{ уравненіе про-}$$

екціи на плоскости xy искомой прямой пресѣченія.

По изключеніи y получимъ:

$$(N'-N)\,z + (N'M-NM')\,x = LN'-L'N, \text{ или}$$

$$x = \frac{N-N'}{N'M-NM'}\,z + \frac{LN'-L'N}{N'M-NM'}, \text{ уравненіе}$$

проэкціи на плоскости xz той же прямой.

Изключивъ x получимъ:

$$(M'-M)\,z + (NM'-N'M)\,y = LM'-L'M, \text{ или}$$

$$y = \frac{M-M'}{NM'-N'M}\,z + \frac{LM'-L'M}{NM'-N'M}, \text{ уравненіе}$$

проэкціи на плоскости zy тойже прямой (*).

Естьли плоскости не пресѣкутся, то есть параллельны между собою, тогда пресѣ-

---

(*) Способъ употребленный нами къ опредѣленію прямой пресѣченія двухъ плоскостей, можетъ быть придоженъ и къ какимъ ни есть поверхностямъ.

ченіе оныхъ не существуетъ, почему уравненіе проэкціи онаго, напримѣръ на плоскости xy,

$$(M-M')x+(N-N')y=L-L',$$

не должно быть удовлетворено никакими величинами x и y, но поелику x и y въ семъ уравненіи имѣютъ произвольныя величины, то явно, что сіе не иначе можно произвесть, какъ уничтоживъ члены, содержащіе x и y, въ семъ уравненіи; для сего и получимъ: $M-M'=o$, и $N-N'=o$, условія когда плоскости не пресѣкаются, то есть параллельны между собою.

Изъ сихъ условій получимъ $M=M'$ и $N=N'$, то есть, что уравненія двухъ параллельныхъ между собою плоскостей будутъ:

$$z+Mx+Ny=L, \text{ и } z+Mx+Ny=L'.$$

Естьли бы опредѣлили слѣды плоскостей, представленныхъ сими уравненіями, получили бы для первой плоскости:

$z=-Mx+L$, на плоскости xz;
$z=-Ny+L$, — — — — zy;
$y=-\frac{M}{N}x+\frac{L}{N}$, — — — — xy,

а для второй плоскости:

$z=-Mx+L'$, на плоскости zx;
$z=-Ny+L'$, — — — — zy;
$y=-\frac{M}{N}x+\frac{L'}{N}$, — — — — xy.

Разсмотрѣвъ сіи уравненія заключимъ, что слѣды двухъ параллельныхъ плоскостей на

тѣхъ же плоскостяхъ координатъ, между собою параллельны.

Уравненіе плоскости, проходящей чрезъ данную точку и параллельной данной плоскости.

164) Положимъ, что требуется вывести уравненіе плоскости, параллельной данной и проходящей чрезъ данную точку.

Для сего пусть α, β и γ представляютъ намъ координаты данной точки, а $z+M'x+N'y=L'$ уравненіе данной плоскости; общее уравненіе плоскости есть $z+Mx+Ny=L$.

Поелику данная точка должна находиться на искомой плоскости, то ея координаты будутъ удовлетворять уравненію сей плоскости, почему и получимъ условіе вопроса:

$$\gamma+M\alpha+N\beta=L.$$

Искомая плоскость должна быть параллельна данной, почему и получимъ условія: (163)

$$M=M', \text{ и } N=N'.$$

Соединивъ первое условіе вопроса съ общимъ уравненіемъ плоскости, получимъ:

$$z-\gamma+M(x-\alpha)+N(y-\beta)=0,$$

уравненіе плоскости проходящей чрезъ данную точку; написавъ въ семъ уравненіи вмѣсто неопредѣленныхъ M и N данныя M′ и N′, будемъ имѣть:

$$z-\gamma+M'(x-\alpha)+N'(y-\beta)=0,$$

уравненіе плоскости параллельной данной, и проходящей чрезъ данную точку.

Уравненія прямой проходящей чрезъ данную точку и перпендикулярной къ данной плоскости.

165) Предложимъ теперь вопросъ обратный разрѣшенному нами въ § 162, то есть положимъ что требуется вывести уравненія прямой перпендикулярной къ данной плоскости и проходящей чрезъ данную точку.

Для сего пусть α, β и ε представляютъ намъ координаты данной точки, параллельныя осямъ x, y и z, а $z+M'x+N'y=L'$ уравненіе данной плоскости; общія уравненія прямой суть: $x=az+b$, $y=a'z+b'$, гдѣ a, b, a' и b' неопредѣлены.

Данная точка должна находиться на искомой прямой, почему ея координаты будутъ удовлетворять уравненіямъ сей прямой, и мы получимъ:

$\alpha=a\varepsilon+b$, и $\beta=a'\varepsilon+b'$, первыя два условія вопроса.

Искомая прямая должна быть перпендикулярна къ данной плоскости, почему проэкціи оной будутъ перпендикулярны къ слѣдамъ сей плоскости на тѣхъ же плоскостяхъ координатъ. Но уравненія слѣдовъ данной плоскости суть:

$x=-\frac{1}{M'}z+L'$, на плоскости xz,

$y=-\frac{1}{N'}z+L'$ — — — — yz,

почему два остальныя условія вопроса будутъ:

$1-\frac{a}{M'}=0$ и $1-\frac{a'}{N'}=0$, откуда

$a=M'$ и $a'=N'$.

Соединивъ первыя два условія вопроса съ общими уравненіями прямой, получимъ:

$x-\alpha=a(z-\varepsilon)$ и $y-\mathfrak{C}=a'(z-\varepsilon)$, уравненія прямой проходящей чрезъ данную точку; написавъ въ сіи уравненія вмѣсто неопредѣленныхъ a и b, данныя величины M' и N', получимъ:

$x-\alpha=M'(z-\varepsilon)$ и $y-\mathfrak{C}=N'(z-\varepsilon)$, уравненія прямой проходящей чрезъ данную точку и перпендикулярной къ данной плоскости.

Выраженіе длины перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на данную плоскость.

163) Положимъ, что предложенъ вопросъ вывести выраженіе длины перпендикуляра опущеннаго изъ данной точки на данную плоскость.

Для сего пусть α, $\mathfrak{C}$ и ε, представляютъ намъ координаты данной точки, параллельныя осямъ x, y и z, а $z+M'x+N'y=L'$ уравненіе данной плоскости.

Мы имѣемъ (165) уравненіе прямой проходящей чрезъ данную точку и перпендикулярной къ данной плоскости; оныя суть:

$$x-\alpha=M'(z-\varepsilon) \text{ и } y-\mathfrak{C}=N'(z-\varepsilon).$$

Опредѣлимъ координаты точки пресѣченія сей прямой съ плоскостію, къ которой оная перпендикулярна, то есть съ данною намъ плоскостію; для сей точки пресѣченія будутъ существовать въ тоже время уравненія:

$$x - \alpha = M'(z - \varepsilon)$$

$y - \mathfrak{G} = N'(z - \varepsilon)$ сей прямой, и $z + M'x + N'y = L'$, данной плоскости.

Изъ сихъ трехъ уравненій опредѣлимъ координаты x, y и z точки пресѣченія сей данной плоскости и перпендикулярной къ оной прямой; опредѣленныя величины для оныхъ поставимъ въ выраженіе разстоянія между двумя точками въ пространствѣ, которое въ семъ случаѣ будетъ $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\mathfrak{G})^2+(z-\varepsilon)^2}$, гдѣ α, $\mathfrak{G}$ и ε означаютъ координаты данной точки, а x, y и z, координаты точки пресѣченія перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на данную плоскость, съ сею плоскостію.

Замѣтимъ, что въ выраженіе разстоянія входятъ токмо разности $(x-\alpha)$, $(y-\mathfrak{G})$, $(z-\varepsilon)$, почему и будетъ простѣе опредѣлить прямо сіи разности; для сего введемъ въ уравненіе плоскости сіи разности; оное приметъ видъ:

$$z-\varepsilon+M'(x-\alpha)+N'(y-\mathfrak{G})=L'-\varepsilon-M'\alpha-N'\mathfrak{G};$$

притомъ имѣемъ еще уравненія:

$$x-\alpha=M'(z-\varepsilon) \quad \text{и} \quad y-\mathfrak{G}=N'(z-\varepsilon).$$

Изъ сихъ трехъ уравненій получимъ:

$$z-\varepsilon=\frac{L'-\varepsilon-M'\alpha-N'\mathfrak{G}}{1+M'^2+N'^2};$$

$$x-\alpha=\frac{M'(L'-\varepsilon-M'\alpha-N'\mathfrak{G})}{1+M'^2+N'^2};$$

$$y-\mathfrak{G}=\frac{N'(L'-\varepsilon-M'\alpha-N'\mathfrak{G})}{1+M'^2+N'^2}.$$

По вставленіи сихъ выраженій, въ выраженіе разстоянія между двумя точками, означивъ длину искомаго перпендикуляра чрезъ Q, получимъ:

$$Q = \frac{L' - \gamma - M'\alpha - N'\beta}{\sqrt{1 + M'^2 + N'^2}},$$ выраженіе длины перпендикуляра опущеннаго изъ данной точки на данную плоскость.

Чтобы получить выраженіе длины перпендикуляра опущеннаго на данную плоскость изъ начала координатъ, должно предположить, что данная точка совпадаетъ съ началомъ координатъ, что выразится уравненіями: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$; введя сіи условія въ выраженіе Q, получимъ:

$$q = \frac{L'}{\sqrt{1 + M'^2 + N'^2}},$$ гдѣ q есть длина перпендикуляра опущеннаго на данную плоскость изъ начала координатъ.

Естьли бы данная точка находилась на самой плоскости, то явно, что длина перпендикуляра должна быть равна нулю, то есть $Q = 0$; для чего получимъ условіе:

$L' - \gamma - M'\alpha - N'\beta = 0$, или

$\gamma + M'\alpha + M'\beta = L'$, то есть, когда точка находится на плоскости, то ея координаты должны удовлетворять уравненію сей плоскости.

Выраженіе косинуса угла составляемаго между собою двумя данными плоскостями.

167) Предложимъ вопросъ вывести выраженіе косинуса угла составляемаго между собою двумя данными плоскостями.

емаго двумя данными плоскостями; условіе когда плоскости между собою перпендикулярны.

Для сего пусть $z+Mx+Ny=L$, и $z+M'x+N'y=L'$ представляютъ намъ уравненія двухъ данныхъ плоскостей.

Проведемъ двѣ прямыя, перпендикулярныя каждая къ одной изъ сихъ плоскостей; уравненія сихъ прямыхъ будутъ: (165)

$$x=Mz+b,$$
$$y=Nz+b' \text{ одной прямой,}$$
$$\text{и } x=M'z+c,$$
$$y=N'z+c' \text{ другой прямой.}$$

Уголъ составленный сими прямыми, равенъ углу составленному данными плоскостями, почему вопросъ приведенъ къ нахожденію выраженія косинуса угла, составляемаго сими двумя прямыми. Для сего возмемъ выраженіе косинуса угла составляемаго двумя прямыми (152); оное есть:

$$\frac{1+md+m'd'}{\sqrt{1+m^2+m'^2}.\sqrt{1+d^2+d'^2}}.$$

Поставивъ въ сіе выраженіе вмѣсто m, m', d и d' соотвѣтствующія онымъ данныя въ семъ вопросѣ величины M, N, M′ и N′, и означивъ при томъ уголъ между двумя данными плоскостями чрезъ s, получимъ:

$$cos.\,s=\frac{1+MM'+NN'}{\sqrt{1+M^2+N^2}.\sqrt{1+M'^2+N'^2}},$$

выраженіе косинуса угла составляемаго двумя данными плоскостями.

Когда плоскости между собою перпендикулярны, тогда косинусъ угла оными составляемаго равенъ нулю, почему и получимъ:

$$1 + M N + M' N' = 0,$$

условіе перпендикулярности двухъ плоскостей.

Выраженіе косинусовъ угловъ составляемыхъ какою ни есть плоскостію съ плоскостями координатъ.

168) Чтобы найти выраженія для косинусовъ угловъ составляемыхъ какою ни есть плоскостію съ плоскостями координатъ, возмемъ въ разсужденіе, напримѣръ, плоскость, коей уравненіе есть: $z + Mx + Ny = L$, и будемъ полагать поперемѣнно, что другая плоскость, коей уравненіе есть $z + M'x + N'y = L'$, совпадаетъ съ плоскостями координатъ; условіе сего совпаденія будемъ поставлять въ выраженіе выведенное нами для косинуса угла, составляемаго двумя плоскостями.

И такъ положимъ, что другая плоскость совпадаетъ съ плоскостію $x\,y$, коей уравненіе есть $z = o$, почему и получимъ условія $M' = o$, $N' = o$ и $L' = o$; введя сіи условія въ выраженіе *cos.* ε и означивъ уголъ составляемый данною плоскостію съ плоскостію $x\,y$ чрезъ X, получимъ:

$$cos.\,X = \frac{1}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}}.$$

Положимъ, что другая плоскость совпадаетъ съ плоскостію zx, коей уравненіе есть $y = o$, почему и получимъ условія $L' = o$, $M' = o$, и $N' = \frac{1}{o}$; означивъ уголъ составляемый данною плоскостію съ плоскостію zx чрезъ z, и вве-

для сперва два первыя, а потомъ третіе условіе въ выраженіе *cos.* 8, придавъ оному видъ:

$$\frac{\frac{1}{N'}+\frac{MM'}{N'}+N}{\sqrt{1+M^2+N^2}.\sqrt{\frac{1}{N'^2}+\frac{M'^2}{N'^2}+1}}, \text{ получимъ:}$$

$$cos.Z=\frac{N}{\sqrt{1+M^2+N^2}}.$$

Положимъ, наконецъ, что другая плоскость совпадаетъ съ плоскостію $z\,y$, коей уравненіе есть $x=0$, почему и получимъ условія $L'=0$, $N'=0$, и $M'=\frac{1}{0}$; означивъ уголъ составляемый данною плоскостію съ плоскостію $z\,y$ чрезъ Y, и введя сперва два первыя, а потомъ третіе условіе въ выраженіе *cos.* 8, придавъ оному видъ:

$$\frac{\frac{1}{M'}+M+\frac{NN'}{M'}}{\sqrt{1+M^2+N^2}.\sqrt{\frac{1}{M'^2}+1+\frac{N'^2}{M'^2}}}, \text{ получимъ:}$$

$$cos.Y=\frac{M}{\sqrt{1+M^2+N^2}}.$$

Замѣтимъ, что взявъ сумму квадратовъ найденныхъ косинусовъ, получимъ:

$cos.^2X+cos.^2Y+cos.^2Z=1$, условное уравненіе между косинусами угловъ, составляемыхъ тою же плоскостію съ плоскостями координатъ. Сіе уравненіе показываетъ, что двумя токмо изъ трехъ угловъ X, Y и Z располагать можно.

Введемъ въ выраженіе *cos.* ε, косинуса угла составляемаго двумя плоскостями между собою (167) вмѣсто предстоящихъ уравненій сихъ плоскостей, углы составляемые сими плоскостями съ плоскостями координатъ. Для сего положимъ, что другая плоскость составляетъ съ плоскостями координатъ $x\,y$, $z\,x$, и $z\,y$ углы X′, Z′ и Y′; получимъ подобнымъ образомъ:

$$cos.X' = \frac{1}{\sqrt{1+M'^2+N'^2}}, \quad cos.\,Z' = \frac{N'}{\sqrt{1+M'^2+N'^2}},$$

$$cos.Y' = \frac{M'}{\sqrt{1+M'^2+N'^2}} \text{ и } cos.^2X'+cos.^2Y'+cos.^2Z' = 1.$$

Поелику же имѣемъ:

$$cos.\,\varepsilon = \frac{1+MM'+NN'}{\sqrt{1+M^2+N^2}.\sqrt{1+M'^2+N'^2}},$$

то по введеніи въ сіе выраженіе *cos.* X, *cos.* Z, *cos.* Y, *cos.* X′, *cos.* Z′ и *cos.* Y′, что можно сдѣлать составивъ изъ соединенія выраженій сихъ косинусовъ уравненія:

$$\frac{cos.Y}{cos.X} = M, \quad \frac{cos.Z}{cos.X} = N, \quad \frac{cos.\,Y'}{cos.X'} = M', \quad \frac{cos.\,Z'}{cos.X'} = N',$$

замѣтивъ притомъ, что имѣемъ:

$cos.^2X+cos.^2Y+cos.^2Z = 1$, $cos.^2X'+cos.^2Y'+cos.^2Z' = 1$,

получимъ окончательно:

$cos.\,\varepsilon = cos.\,X.\ cos.\,X' + cos.\,Y\ cos.\,Y' + cos.\,Z\ cos.\,Z'.$

Выводъ достойный примѣчанія, показывающій что косинусъ угла составляемаго какими ни есть плоскостями между собою, равенъ суммѣ произведеній изъ косинусовъ соотвѣтствующихъ угловъ, составляемыхъ сими плоскостями съ плоскостями координатъ.

169) Мы видѣли, что перемѣна координатъ на плоскости служитъ къ приданію данному для изслѣдованія уравненію какой ни есть кривой линіи простѣйшаго вида; подобное сему можемъ сказать и о перемѣнѣ координатъ въ пространствѣ. Переходъ отъ уравненія какой ни есть поверхности къ другому уравненію оной.

Посредствомъ перемѣны координатъ въ пространствѣ можно придать данному для изслѣдованія уравненію поверхности простѣйшій видъ, изъ котораго бы, по сему, свойства сей поверхности могли быть угадываемы скорѣе. Чтобы перейти отъ уравненія поверхности къ другому уравненію оной посредствомъ перемѣны координатъ, принимаютъ въ разсужденіе формулы, показывающія величину координатъ первоначальныхъ въ величинѣ координатъ новыхъ; сіи формулы заключаютъ въ себѣ, смотря по разнымъ обстоятельствамъ при перемѣнѣ координатъ, болѣе или менѣе произвольныхъ количествъ, почему, по введеніи величинъ координатъ новыхъ въ предложенное уравненіе поверхности, можемъ положить равнымъ нулю такое число предстоящихъ въ семъ новомъ уравненіи поверхности, сколько будетъ сихъ произвольныхъ количествъ, и отъ сего положенія уравненіе поверхности приметъ простѣйшій видъ.

170) Займемся выведеніемъ формулъ для перемѣны одного направленія координатъ прямоугольныхъ въ прямоугольныя же координаты. Формулы для перемѣны направленія

координатъ прямоугольныхъ въ прямоугольныя же координаты. Фиг. 50.

Для сего положимъ, что Ax, Ay, Az представляютъ намъ оси прямоугольныхъ координатъ x, y, и z; примемъ сіи координаты за первоначальныя и положимъ что, не перемѣняя начала, должно перемѣнить направленіе сихъ осей координатъ въ другія прямоугольныя же координаты x''', y''', и z''', коихъ оси пусть будутъ Ax''', Ay''' и Az'''.

Чтобы опредѣлить положеніе новыхъ осей координатъ относительно къ первоначальнымъ, положимъ, что уголъ, составляемый плоскостями $x'''y'''$ и xy, или, что все равно, уголъ, составляемый перпендикулярными къ симъ плоскостямъ осями Az''' и Az, равенъ ω. Поелику симъ угломъ опредѣляется положеніе плоскости $x'''y'''$ относительно къ плоскости xy, а потому и положеніе оси Az''' относительно къ оси Az; то остается еще ввести углы, которые бы опредѣлили положеніе осей Ax''' и Ay'''; для сего положимъ что прямая AQ есть взаимное пресѣченіе плоскостей $x'''y'''$ и xy, и что уголъ составляемый сею прямою и осью Ax''' равенъ φ, а уголъ составляемый тою же прямою AQ и осью Ax равенъ ψ; положеніе оси Ay''' опредѣлится по оси Ax'''; такимъ образомъ, помощію трехъ угловъ ψ, ω, и φ положеніе системы новыхъ координатъ, относительно къ системѣ координатъ первоначальныхъ, совершенно опредѣлится. Вопросъ состоитъ въ томъ, чтобы выразить

величины первоначальныхъ координатъ x, y, и z въ величинахъ x''', y''', z''', α, φ и ψ, но прежде сего сдѣлаемъ слѣдующее пріуготовительное строеніе.

Чрезъ оси Az и Az''' проведемъ плоскость Azz''', которая, проходя чрезъ прямую Az будетъ перпендикулярна къ плоскости xy, а по сему ея пресѣченіе Ay' съ сею плоскостію будетъ проэкція на сей плоскости xy оси Az'''; положимъ, что пресѣченіе сей проэктирующей плоскости съ плоскостію $x'''y'''$ будетъ прямая Ay''.

Разрѣшеніе вопроса будетъ приведено къ перемѣнѣ координатъ трехъ прямоугольныхъ системъ, на плоскостяхъ.

Перемѣнимъ координаты x, y, z въ координаты x', y', z' взявъ ось z за ось z', прямую пресѣченія AQ за ось x', а проэкцію Ay' за ось y'. Поелику ось z' взята на оси z, а прямыя y', x' и x, y находятся въ той же плоскости xy и притомъ x' перпендикулярна къ y', а x перпендикулярна къ y, то и должно взять формулы для перемѣны координатъ прямоугольныхъ въ прямоугольныя же, на плоскости (40); замѣтивъ, притомъ, что здѣсь входитъ уголъ ψ, получимъ:

$$x = x' \cos. \psi - y' \sin. \psi;$$
$$y = x' \sin. \psi + y' \cos. \psi;$$
$$z = z'.$$

Перемѣнимъ координаты x', y', z' въ координаты x'', y'', z'' взявъ ось x'' за ось x', ось y'' за прямую А y'', и ось z'' за ось z'; поелику ось x'' взята за ось x', а прямыя y'', z'' и y', z' находятся въ той же плоскости zy'', и притомъ y'' перпендикулярна къ z'', и y' перпендикулярна къ z', то, замѣтивъ, что здѣсь входитъ уголъ ω, получимъ:

$$x' = x''$$
$$y' = z'' \sin.\ \omega + y'' \cos.\ \omega;$$
$$z' = z'' \cos.\ \omega - y'' \sin.\ \omega.$$

Наконецъ перемѣнимъ координаты x'', y'', z'' въ координаты x''', y''', z''', взявъ ось z'' за ось z'''; поелику прямыя x'', y'' и x''', y''' находятся въ той же плоскости $x'''y'''$, и притомъ x'' перпендикулярна къ y'', а x''' перпендикулярна къ y''', то замѣтивъ, что здѣсь входитъ уголъ φ, получимъ:

$$x'' = x''' \cos.\ \varphi + y''' \sin.\ \varphi;$$
$$y'' = y''' \cos.\ \varphi - x''' \sin.\ \varphi;$$
$$z'' = z'''.$$

Поставивъ сіи величины x'', y'', z'' въ выраженія x', y', z', и потомъ выраженія x', y', z' въ величины x, y, z, получимъ величины координатъ x, y, z въ величинахъ координатъ x''', y''', z''', то есть, величины координатъ первоначальныхъ въ величинахъ координатъ новыхъ; произведя изчисленіе, будемъ имѣть:

$$x = \begin{cases} x'''(\cos.\varphi\cos.\psi + \cos.\omega\sin.\varphi\sin.\psi) \\ + y'''(\sin.\varphi\cos.\psi - \cos.\omega\cos.\varphi\sin.\psi) \\ - z'''\sin.\omega\sin.\psi. \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x'''(\sin.\psi\cos.\varphi - \cos.\omega\cos.\psi\sin.\varphi) \\ + y'''(\sin.\varphi\sin.\psi + \cos.\omega\cos.\psi\cos.\varphi) \\ + z'''\sin.\omega\cos.\psi. \end{cases}$$

$$z = z'''\cos.\omega - y'''\cos.\varphi\sin.\psi - x'''\sin.\omega\sin.\varphi,$$

формулы для перемѣны направленія координатъ, при переходѣ изъ системы прямоугольной въ прямоугольную же систему. Поелику углы ω, φ и ψ, не токмо достаточны, но и необходимы для опредѣленія положенія новыхъ осей относительно къ первоначальнымъ, то изъ сего слѣдуетъ, что въ семъ случаѣ при перемѣнѣ координатъ имѣемъ три произвольныя величины: ω, φ и ψ.

171) Мы вывели формулы для перемѣны одного токмо направленія; но естьли требуется перемѣнить одно токмо начало координатъ, то для сего вообразимъ шесть плоскостей параллельныхъ по двѣ, и въ семъ случаѣ составляющихъ между собою прямые углы; пусть сіи плоскости будутъ Z X, Z Y, X Y и zx, zy, xy, изъ которыхъ первыя три примемъ за плоскости новыхъ координатъ, а три послѣднія за плоскости координатъ первоначальныхъ. Формулы для перемѣны одного токмо начала координатъ; и формулы для перемѣны начала и направленія координатъ, при переходѣ изъ системы прямоу-

Явно, что для опредѣленія положенія новыхъ осей координатъ A′Z, A′X, A′Y, отно-

гольной въ прямо угольную же систе- му.

сительно къ положенію осей A z, A x, A y координатъ первоначальныхъ, должно задать величины, опредѣляющія положеніе новаго начала A′; сіи величины будутъ координаты точки A′ относительно къ плоскостямъ zx, zy, xy координатъ первоначальныхъ; положимъ что сіи координаты будутъ $\mathfrak{C}$, α и ε, замѣчая, что оныя параллельны осямъ Ay, Ax и Az. Примемъ въ разсужденіе, что координата $\mathfrak{C}$ означаетъ разстояніе между плоскостями xz и XZ, координата α разстояніе между плоскостями zy и ZY, и наконецъ координата ε разстояніе между плоскостями xy и XY; изъ чего и слѣдуетъ что по предположеніи какой ни есть точки въ пространствѣ, отнесенной къ системѣ первоначальной координатами x, y и z, а къ системѣ новой координатами X, Y и Z, будемъ имѣть слѣдующія величины для x, y и z. Величина y будетъ равна величинѣ Y, сложенной съ разстояніемъ между плоскостями xz и XZ; величина z будетъ равна величинѣ Z сложенной съ разстояніемъ между плоскостями xy и XY; величина x будетъ равна величинѣ X, сложенной съ разстояніемъ между плоскостями zy и ZY. По сему, введя вмѣсто сихъ разстояній величины, которыми мы ихъ означили, получимъ:

$$x = X + \alpha,$$
$$y = Y + \mathfrak{C},$$
$$z = Z + \varepsilon,$$

формулы для перемѣны одного только начала координатъ; при семъ случаѣ перемѣны координатъ имѣемъ три произвольныя количества: α, β и γ. Знаки величинъ α, β и γ въ сихъ уравненіяхъ будутъ измѣняться смотря по взаимному положенію, всегда параллельному, плоскостей новой системы относительно къ плоскостямъ системы первоначальной.

Явно что когда должно перемѣнить начало и вмѣстѣ направленіе координатъ, принимая въ разсужденіе двѣ прямоугольныя системы, то означивъ для краткости въ формулахъ § 170 соединеніе, которымъ выражена величина x, въ величинѣ x''', y''', z''', ω, φ и ψ чрезъ F; соединеніе которымъ выражена величина y чрезъ F′, и наконецъ соединеніе, которымъ выражена величина z чрезъ F″, получимъ:

$$x = F(x''', y''', z''', \omega, \varphi, \psi) + g;$$
$$y = F'(x''', y''', z''', \omega, \varphi, \psi) + b;$$
$$z = F''(x''', y''', z''', \omega, \varphi, \psi) + l;$$

въ сихъ уравненіяхъ величины g, b и l означаютъ координаты новаго начала координатъ x''', y''', z''', отнесеннаго къ осямъ координатъ первоначальныхъ x, y, z. При употребленіи сихъ формулъ имѣемъ шесть произвольныхъ величинъ: ω, φ, ψ, g, b и l.

О ПОВЕРХНОСТЯХЪ ВТОРАГО ПОРЯДКА.

Раздѣленіе поверхностей на порядки.

172) Мы сказали, что уравненіемъ поверхности называется отношеніе, существующее между тремя перемѣнными x, y и z, выражающее свойство сей поверхности; такимъ образомъ различныя отношенія между тремя перемѣнными означаютъ поверхности, имѣющія различный видъ и свойства. По сему поверхности раздѣляются на порядки, такъ какъ и линіи, смотря по степени уравненія, коимъ оныя выражаются. Поелику уравненіе плоскости, выведенное нами, есть уравненіе между x, y и z первой степени, то плоскость и можетъ быть названа поверхностію *перваго порядка;* уравненіе между тремя перемѣнными x, y и z второй степени, будетъ принадлежать поверхностямъ, которыя называются поверхностями *втораго порядка*, и такъ далѣе.

Способъ выводить уравненіе поверхности; уравненіе шара.

173) Изъ самаго опредѣленія, что есть уравненіе поверхности слѣдуетъ, что дабы вывести уравненіе какой ни есть поверхности, по данному отличительному свойству оной, должно предположить какую ни есть точку находящеюся на сей поверхности; тогда написавъ аналитически отношеніе, между координатами x, y и z сей точки, выражающее по сему свойство поверхности, на которой сія точка предположена находящеюся, получимъ уравненіе сей поверхности.

Пусть требуется вывести уравненіе поверхности, которой бы всѣ точки равно отстояли отъ данной неподвижной точки.

Для сего положимъ, что α, β и γ означаютъ координаты данной неподвижной точки, отнесенной къ тремъ взаимно перпендикулярнымъ осямъ x, y и z, и что r есть общее разстояніе всѣхъ точекъ поверхности до сей точки. Предположимъ какую ни есть точку на сей поверхности, по сему означимъ координаты оной чрезъ x, y и z. Выраженіе разстоянія между сею какою ни есть точкою и данною неподвижною, будетъ: $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}$; поелику сіе разстояніе по свойству поверхности должно быть постоянно, и именно равно r, то уравнявъ оное r, получимъ: $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}=r$, или $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$, уравненіе между x, y и z выражающее свойство предложенной поверхности, а по сему уравненіе сей поверхности. По свойству данному въ вопросѣ видно, что предложенная даннымъ свойствомъ поверхность есть шаръ; степень выведеннаго уравненія показываетъ, что шаръ есть поверхность втораго порядка.

Уравненіе поверхности конуса.

174) Положимъ еще, что требуется вывести уравненіе поверхности, произведенной движеніемъ прямой, проходящей чрезъ неподвижную точку, и составляющей съ неподвиж-

ною прямою, протянутою чрезъ сію же точку, постоянный уголъ.

Для сего пусть координаты данной неподвижной точки будутъ α', $\mathfrak{C}'$ и ε'; тогда уравненія данной неподвижной прямой будутъ: $x-\alpha = a(z-\varepsilon)$, и $y-\mathfrak{C} = b(z-\varepsilon)$, гдѣ a и b суть данныя постоянныя величины, и положимъ, что M есть косинусъ постояннаго угла.

Прямая, производящая ея движеніемъ предложенную поверхность, должна проходить во всѣхъ своихъ положеніяхъ чрезъ данную неподвижную точку, почему ея уравненія будутъ имѣть видъ:

$$x-\alpha = a'(z-\varepsilon), \text{ и } y-\mathfrak{C} = b'(z-\varepsilon),$$

гдѣ a' и b' будутъ постоянны для одного изъ ея положеній, и измѣняться при движеніи сей прямой.

Косинусъ угла, составляемаго сею прямою съ данною неподвижною прямою будетъ выраженъ чрезъ (152).

$$\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{1+a^2+b^2}\cdot\sqrt{1+a'^2+b'^2}}.$$

Поставивъ вмѣсто a' и b' величины оныхъ въ перемѣнныхъ x и y, извлеченныя изъ уравненій прямой, которыя суть:

$\frac{x-\alpha}{z-\varepsilon}$ и $\frac{y-\mathfrak{C}}{z-\varepsilon}$, получимъ выраженіе угла составляемаго всѣми положеніями сей прямой съ данною неподвижною прямою;

сіе выраженіе будетъ: $\frac{1+a.\frac{x-\alpha}{z-\varepsilon}+b.\frac{y-\varepsilon}{z-\varepsilon}}{\sqrt{1+a^2+b^2}.\sqrt{1+\frac{(x-\alpha)^2}{(z-\varepsilon)^2}+\frac{(y-\varepsilon)^2}{(z-\varepsilon)^2}}}$.

Поелику по свойству поверхности уголъ, а потому и косинусъ сего угла составляемаго всѣми положеніями прямой съ неподвижною прямою, постояненъ, и именно равенъ M, то уравнявъ оный M, получимъ:

$$\frac{1+a.\frac{x-\alpha}{z-\varepsilon}+b.\frac{y-\varepsilon}{z-\varepsilon}}{\sqrt{1+a^2+b^2}.\sqrt{1+\frac{(x-\alpha)^2}{(z-\varepsilon)^2}+\frac{(y-\varepsilon)^2}{(z-\varepsilon)^2}}}=M, \text{ или,}$$

уничтоживъ знаменателя и возвысивъ обѣ части уравненія въ квадратъ, будемъ имѣть:

$$[z-\varepsilon+a(x-\alpha)+b(y+\varepsilon)]^2=M^2(1+a^2+b^2)$$
$$[(x-\alpha)^2+(y-\varepsilon)^2+(z-\varepsilon)^2],$$

отношеніе между x, y и z принадлежащее всѣмъ положеніямъ прямой, производящей предложенную даннымъ свойствомъ поверхность, а посему уравненіе сей поверхности. Изъ самаго заданія легко усмотрѣть, что сія поверхность есть поверхность конуса, котораго ось дана уравненіями $x-\alpha=a(z-\varepsilon)$ и $y-\varepsilon=b(z-\varepsilon)$; степень выведеннаго нами уравненія поверхности показываетъ, что коническая поверхность есть поверхность втораго порядка.

175) Имѣя уравненіе какой ни есть поверхности, которое будетъ заключать посе- Общій способъ изслѣ-

довать поверхность, предложенную ея уравненіемъ; изслѣдованіе поверхности шара.

му три перемѣнныхъ x, y и z, можно придавать двумъ изъ оныхъ произвольныя постоянныя величины, опредѣлять изъ сего уравненія величину третьяго перемѣннаго, и строить по тремъ извѣстнымъ координатамъ точки принадлежащія сей поверхности; подобный способъ приложенъ былъ нами къ плоскости. Но сей способъ относительно къ какой ни есть поверхности весьма невыгоденъ, ибо, получая помощію онаго ясное понятіе о видѣ какой ни есть кривой линіи, не можемъ представить довольно ясно взаимнаго положенія точекъ разсматривая поверхность, и слѣдовательно вообразить вида сей поверхности, почему при разсматриваніи поверхностей и употребляютъ иное средство.

При разсматриваніи какой ни есть поверхности пресѣкаютъ оную плоскостями, имѣющими извѣстное положеніе, какъ на примѣръ плоскостями координатъ и параллельными онымъ; кривыя пресѣченія будутъ находиться на сей поверхности, по сему, по виду и положенію сихъ кривыхъ судятъ о видѣ самой поверхности.

Положимъ, на примѣръ, что требуется изслѣдовать поверхность коей уравненіе есть:
(173)... $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2$,

Чтобы привести сіе уравненіе въ простѣйшій видъ перемѣнимъ начало координатъ,

поставивъ оное въ центръ шара; для сего положимъ (172) $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$, $z = z' + \gamma$.

По вставленіи вмѣсто x, y и z сихъ величинъ, будемъ имѣть: $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2$.

Пресѣчемъ поверхность плоскостію $x'\,y'$; уравненіе сей плоскости есть $z' = 0$, почему для кривой пресѣченія получимъ въ тоже время $z' = 0$, и $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2$, откуда будемъ имѣть $x'^2 + y'^2 = r^2$, уравненіе круга, изъ чего и слѣдуетъ что кривая пресѣченія будетъ *кругъ*. Подобнымъ образомъ получимъ для кривыхъ пресѣченія поверхности съ плоскостями $z'y'$ и $z'x'$ уравненія $y'^2 + z'^2 = r^2$, и $x'^2 + z'^2 = r^2$, то есть, что кривыя пресѣченія будутъ *круги*.

Для кривой пресѣченія данной поверхности съ плоскостію параллельною плоскости $x'\,y'$, и которой уравненіе по сему есть $z' = d$, получимъ въ тоже время: $z' = d$, и $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2$, откуда $x'^2 + y'^2 = r^2 - d^2$, уравненіе кривой пресѣченія, которая посему есть также *кругъ*. Подобнымъ образомъ для кривыхъ пресѣченія поверхности съ плоскостями параллельными $x'\,z'$ и $y'\,z'$, и коихъ уравненія посему суть: $y' = d'$ и $x' = d''$ получимъ $x'^2 + z'^2 = r^2 - d'^2$, и $y'^2 + z'^2 = r^2 - d''^2$, уравненія круговъ, изъ чего заключимъ, что кривыя пресѣченія будутъ также *круги*.

По пресѣченіи сей поверхности какою ни есть плоскостію, и по опредѣленіи проэкцій кривой пресѣченія найдемъ, что сіи проэкціи

будутъ эллипсисы, то есть проэкціи круга, а по сему кривая пресѣченія будетъ также *кругъ*. (*)

Почему данная поверхность имѣя свойство, по которому разсѣкается всѣми плоскостями въ *кругахъ*, будетъ шаръ.

176) Возмемъ въ разсужденіе уравненіе, выведенное нами въ § 174; сіе уравненіе есть:

$$[z - \varepsilon + a(x - \alpha) + b(y - \beta)]^2 = M^2(1 + a^2 + b^2)$$
$$[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \varepsilon)^2].$$

Изслѣдованіе поверхности конуса.

Разсѣчемъ поверхность представленную симъ уравненіемъ плоскостію xy, которой уравненіе есть $z = 0$; соединивъ сіе уравненіе съ предложеннымъ, получимъ для кривой пресѣченія съ поверхностію сей плоскости, уравненіе:

$$[-\varepsilon + a(x - \alpha) + b(y - \beta)]^2 = M^2(1 + a^2 + b^2)$$
$$[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + \varepsilon^2];$$

сіе уравненіе, по предположеніи, что уголъ при вершинѣ конуса и положеніе въ пространствѣ онаго произвольны, можетъ принять

(*) Замѣтимъ, что проэкціи круга будутъ всегда эллипсисы, изключая тѣ случаи, въ которыхъ сей кругъ находится въ плоскости параллельной плоскости координатъ, или перпендикулярной къ сей плоскости; въ первомъ случаѣ проэкція будетъ кругъ равный находящемуся въ пространствѣ, а во второмъ проэкція круга будетъ прямая линія.

видъ уравненія: $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F$, всѣхъ кривыхъ линій втораго порядка. Изъ чего и слѣдуетъ свойство конуса, изложенное нами подробно въ § 134.

177) *Центромъ* какой ни есть поверхности называется точка, чрезъ которую проходящая хорда дѣлится въ оной пополамъ.

Что называется *центромъ* и *діаметральными* плоскостями поверхности; уравненіе поверхностей втораго порядка, имѣющихъ центръ.

Діаметральными плоскостями называются плоскости, раздѣляющія какую ни есть систему параллельныхъ между собою хордъ поверхности пополамъ.

Способъ, которой мы употребимъ для выведенія уравненія поверхностей втораго порядка имѣющихъ центръ, можетъ быть приложенъ вообще къ какимъ ни есть поверхностямъ при изысканіи имѣютъ ли сіи поверхности центръ.

Для сего возмемъ въ разсужденіе общее уравненіе поверхностей втораго порядка; оное есть:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz = L;$$

сіе уравненіе по раздѣленіи на L, и означивъ тогда предстоящія онаго чрезъ a, b, c, d, e, f, g, h и k, ни мало не потеряетъ его всеобщности, и приметъ видъ:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz = 1 \ldots\ldots (1)$$

Перемѣнимъ начало координатъ, для сего возмемъ формулы: $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$, $z = z' + \gamma$.

По вставленіи въ предложенное уравненіе вмѣсто x, y и z сихъ величинъ, разположеніи

вывода по степенямъ перемѣнныхъ, и означеніи новыхъ предстоящихъ чрезъ a', b', c', d', f', g', h', k' и l' получимъ:

$$a'x'^2+b'y'^2+c'z'^2+d'x'y'+e'x'z'+f'y'z'+g'x'+h'y'+k'z'=l' \ldots\ldots (s).$$

Поелику введены въ сіе новое уравненіе три произвольныя количества α, β и γ, входящія въ составъ его предстоящихъ, то мы и можемъ положить: $g'=0$, $h'=0$, и $k'=0$; $\ldots (t)$

Изъ сихъ трехъ уравненій опредѣляютъ величины α, β и γ; по введеніи сихъ величинъ въ предстоящія уравненія (s) положимъ что сіи предстоящія обратятся въ l, m, n, o, p, q, r и s; получимъ: $lx'^2+my'^2+nz'^2+px'y'+qx'z'+ry'z'=s \ldots\ldots (u)$

Чтобы общее уравненіе поверхностей втораго порядка могло быть приведено къ сему виду должно, чтобы величины для α, β и γ, опредѣленныя изъ условныхъ уравненій (t) ни были ни мнимыя, ни безконечныя. Поелику уравненія (t) суть первой степени, то величины для α, β и γ не могутъ быть мнимыя; при производствѣ всего изчисленія оныя найдутся дробными, и коихъ общій знаменатель будетъ $ae^2+bf^2+cd^2-4abc-def$, изъ чего видно, что α, β и γ могутъ быть безконечными, когда будемъ имѣть $ae^2+bf^2+cd^2=4abc+def$, слѣдовательно въ семъ послѣднемъ случаѣ общее уравненіе поверхностей втораго порядка не можетъ принять вида уравненія (u).

Положимъ, что $ae^2 + bf^2 + cd^2$ не равно $4abc + def$; тогда общее уравненіе поверхностей втораго порядка приметъ видъ уравненія (*u*). Уравненіе (*u*) не премѣняется естьли мы поставимъ въ оное вмѣсто $+x'$, $+y'$, $+z'$ величины $-x'$, $-y'$, $-z'$ соотвѣтственно, изъ чего и слѣдуетъ, что прямая, проведенная чрезъ начало координатъ x', y', z', коей уравненія по сему будутъ вида: $x' = mz'$ и $y' = nz'$, встрѣтитъ поверхность въ точкахъ, коихъ координаты будутъ равны между собою, но токмо съ противными знаками, почему длина сей прямой между точками ея пресѣченія съ поверхностію, будетъ раздѣлена на двѣ равныя части въ началѣ координатъ x', y', z', коего координаты x, y и z суть α, β и ε; изъ чего и слѣдуетъ, что сіе начало координатъ x', y', z' будетъ центромъ поверхностей предложенныхъ уравненіемъ (*u*).

И такъ уравненіе (*u*) будетъ уравненіемъ поверхностей втораго порядка имѣющихъ центръ; но поелику приданіе сего вида общему уравненію (*i*) поверхностей втораго порядка, возможно токмо тогда, когда предстоящія онаго имѣютъ таковыя величины, которыя не удовлетворяютъ уравненію $ae^2 + bf^2 + cd^2 = 4abc + def$, то мы и заключимъ, что общее уравненіе поверхностей втораго порядка представляетъ поверхности имѣющія центръ токмо

тогда, когда между его предстоящими не существуетъ уравненія: $ae^2+bf^2+cd^2=4abc+def$.

Изслѣдованіе поверхностей втораго порядка, имѣющихъ центръ.

178) Изслѣдуемъ поверхности втораго порядка имѣющія центръ; для сего возмемъ въ разсужденіе уравненіе оныхъ: (177)

$$l'x'^2+m'y'^2+n'z'^2+p'x'y'+q'x'z'+r'y'z'=s'.$$

Для приведенія сего уравненія въ простѣйшій видъ перемѣнимъ направленіе координатъ прямоугольныхъ въ прямоугольныя же координаты; для сего возмемъ формулы (170), въ которыхъ перемѣнимъ x, y и z на x', y' и z', примѣняя къ предложенному уравненію; симъ формуламъ, для краткости, можно придать видъ:

(171)
$$x'=F(x''', y''', z''', \omega, \varphi, \psi);$$
$$y'=F'(x''', y''', z''', \omega, \varphi, \psi);$$
$$z'=F''(x''', y''', z''', \omega, \varphi, \psi).$$

По введеніи сихъ величинъ x', y', z' въ предложенное уравненіе поверхностей и означеніи, что предстоящія различныхъ членовъ вывода, по разположеніи онаго по степенямъ перемѣнныхъ, обратятся въ l', m' n', p', q', r' и s', получимъ:

$$l'x'''^2+m'y'''^2+n'z'''^2+p'x'''y'''+q'x'''z'''+r'y'''z'''=s'.$$

Поелику въ составъ предстоящихъ сего уравненія входятъ тригонометрическія линіи трехъ угловъ: ω, φ и ψ, которые произвольны, то мы и можемъ уравнять нулю три изъ предстоящихъ сего уравненія; и такъ положимъ:

$p' = 0$, $q' = 0$, и $r' = 0$; изъ сихъ условныхъ уравненій опредѣленныя величины для тригонометрическихъ линій угловъ ω, φ и ψ будутъ дѣйствительныя, почему наши положенія существовать могутъ. По введеніи величинъ для сихъ тригонометрическихъ линій въ уравненіе между x''', y''', z''', положимъ что первыя три его предстоящія обратятся въ L', M' и N', а четвертой въ s''; будемъ имѣть: $L'x'''^2 + M'y'''^2 + N'z'''^2 = s''$, или, для избѣжанія знаковъ поставивъ вмѣсто x''', y''', z''' перемѣнныя x, y, z, получимъ:

$$L' x^2 + M' y^2 + N' z^2 = s''$$; сіе уравненіе, по раздѣленіи на s'', и положивъ для краткости:

$$\frac{L'}{s''} = L, \quad \frac{M'}{s''} = M, \text{ и } \frac{N'}{s''} = N, \text{ будетъ}$$

$$L x^2 + M y^2 + N z^2 = 1.$$

Сіе уравненіе, смотря по знакамъ предстоящихъ онаго M и N, можетъ представить намъ къ изслѣдованію три различные случая; знакъ же предстоящаго L перваго члена можетъ быть всегда обращенъ въ положительный. Мы будемъ имѣть M и N положительные; M положительный и N отрицательный, и обратно, и M и N отрицательные. Два среднія случая могутъ быть включены въ одинъ, и именно въ тотъ случай, когда два предстоящія уравненія будутъ положительныя и одинъ

отрицательный; почему намъ и предлежитъ изслѣдовать три случая:

$$Lx^2+My^2+Nz^2=1;\ Lx^2+My^2-Nz^2=1;\ Lx^2-My^2-Nz^2=1.$$

Эллипсоидъ есть поверхность сомкнутая.

179) Разсмотримъ первый случай, то есть изслѣдуемъ поверхность, изображаемую уравненіемъ: $L x^2 + M y^2 + N z^2 = 1$.

Вопервыхъ изслѣдуемъ будетъ ли сія поверхность сомкнутая, то есть обертываетъ ли оная совершенно часть пространства. Для сего, поелику поверхность симетрически расположена относительно къ началу координатъ, воображаютъ, что чрезъ сіе начало проведена прямая, которая можетъ принимать около онаго всевозможныя положенія въ пространствѣ; уравненія сей прямой будутъ: $x = mz$, $y = nz$: въ сихъ уравненіяхъ величины m и n не опредѣлены.

Опредѣляютъ координаты x', y', z' точекъ пресѣченія сей прямой съ предложенною поверхностію: для сихъ точекъ пресѣченія будутъ существовать въ тоже время уравненія:

$$Lx'^2+My'^2+Nz'^2=1,\ x'=mz',\ y'=nz';$$

изъ сихъ уравненій будемъ имѣть:

$$z'=\frac{1}{\sqrt{Lm^2+Mn^2+1}},\ x'=\frac{m}{\sqrt{Lm^2+Mn^2+1}},\ y'=\frac{n}{\sqrt{Lm^2+Mn^2+1}}.$$

Общій знаменатель $L m^2 + M n^2 + 1$ сихъ выраженій никогда нулемъ быть не можетъ,

ибо оный есть сумма трехъ положительныхъ членовъ, изъ чего и слѣдуетъ, что всякая прямая проведенная чрезъ начало координатъ, то есть чрезъ точку внутри предложенной поверхности, не иначе можетъ быть продолжена за сію поверхность какъ прорѣзавъ оную. И такъ предложенная ея уравненіемъ въ семъ параграфѣ поверхность, есть поверхность *сомкнутая.*

Видъ поверхности.

180) Чтобы получить понятіе о видѣ предложенной поверхности употребимъ способъ, изложенный нами въ § 175.

Разсѣчемъ поверхность плоскостію xy, которой уравненіе есть $z=0$; для кривой пресѣченія получимъ: $Lx^2 + My^2 = 1$, уравненіе эллипсиса, то есть плоскостію xy поверхность пресѣкается въ *эллипсисѣ.* Для кривой пресѣченія съ плоскостію zy, коей уравненіе есть $x = 0$, получимъ: $My^2 + Nz^2 = 1$, уравненіе *эллипсиса.* Для кривой пресѣченія съ плоскостію zx, коей уравненіе есть $y=0$, получимъ: $Lx^2 + Nz^2 = 1$, уравненіе *эллипсиса.*

Для кривыхъ линій пресѣченія съ плоскостями, параллельными плоскостямъ xy, zy, zx, поелику уравненія сихъ плоскостей суть: $z=d$, $x=d'$, $y=d''$, получимъ:

$$Lx^2 + My^2 = 1 - Nd^2,$$
$$My^2 + Nz^2 = 1 - Ld'^2,$$
$$Lx^2 + Nz^2 = 1 - Md''^2,$$

уравненія *эллипсисовъ*. И такъ сѣченія пред-
Фиг. 51. ложенной поверхности какъ плоскостями координатъ, такъ и плоскостями, онымъ параллельными, будутъ эллипсисы: сія поверхность называется *эллипсоидомъ*.

Эллипсоидъ вращенія.

181) Естьли въ уравненіи разсматриваемаго нами случая, два предстоящія равны между собою, то есть когда имѣемъ $M = N$, тогда сіе уравненіе обратится въ $Lx^2 + My^2 + Mz^2 = 1$.

Для кривой пресѣченія поверхности плоскостію zy, которой уравненіе есть $x = 0$, имѣемъ: $y^2 + z^2 = \frac{1}{M}$, уравненіе *круга*. Для кривой пресѣченія плоскостію параллельною плоскости zy, и коей уравненіе есть $x = d$, имѣемъ: $y^2 + z^2 = \frac{1 - Ld^2}{M}$, уравненіе *круга*.

Изъ сего слѣдуетъ, что кривыя пресѣченія разсматриваемой поверхности съ плоскостію zy и параллельными оной плоскостями, суть круги, а съ прочими плоскостями проэкцій и параллельными онымъ, эллипсисы, ибо для сихъ пресѣченій будемъ имѣть подобныя уравненія тѣмъ, кои получаемы были въ § 180. Сія поверхность имѣя таковое отличительное свойство, можетъ быть, въ слѣдствіе онаго, произведена обращеніемъ эллипсиса около оси координатъ x, почему сія поверхность и называется *эллипсоидомъ вращенія*.

Шаръ.

182) Естьли въ разсматриваемомъ нами случаѣ имѣемъ: $L = M = N$, тогда уравненіе

поверхности обратится въ $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{L}$; сіе уравненіе есть уравненіе шара, коего центръ въ началѣ координатъ, а радіусъ равенъ $\sqrt{\frac{1}{L}}$.

183) Разсмотримъ теперь вторый случай предложеннаго уравненія, то есть поверхность изображенную уравненіемъ: $Lx^2+My^2-Nz^2=1$. Гиперболоидъ объ одной полѣ есть поверхность не сомкнутая.

Вопервыхъ розыщемъ, будетъ или не будетъ сія поверхность сомкнутою. Для сего предположимъ какую ни есть прямую линію проходящую чрезъ начало координатъ, то есть центръ поверхности; уравненія ея будутъ: $x=mz$, $y=nz$, гдѣ, поелику прямая можетъ принимать всевозможныя положенія, величины m и n суть величины неопредѣленныя.

Для точекъ пресѣченія сей прямой съ поверхностію, означивъ координаты оныхъ чрезъ x', y', z', получимъ:

$$Lx'^2+My'^2-Nz'^2=1,\quad x'=mz',\quad y'=nz'.$$

Изъ сихъ уравненій будемъ имѣть:

$$z'=\frac{1}{\sqrt{Lm^2+Mn^2-N}},\quad x'=\frac{m}{\sqrt{Lm^2+Mn^2-N}},\quad y'=\frac{n}{\sqrt{Lm^2+Mn^2-N}},$$

выраженія для координатъ сихъ точекъ.

Общій знаменатель Lm^2+Mn^2-N выраженій для координатъ точекъ, въ которыхъ прямая обращаясь около центра встрѣчаетъ поверхность, можетъ обратиться въ нуль, когда $Lm^2+Mn^2=N$, изъ чего слѣдуетъ, что координаты точки встрѣчи могутъ быть без-

конечныя, то есть, что существуютъ таковыя положенія сей прямой, въ которыхъ оная пресѣчетъ поверхность въ безконечности, то есть не пресѣчетъ оной, изъ чего и заключимъ, что предложенная даннымъ уравненіемъ поверхность не будетъ *сомкнутая*.

Видъ поверхности.

184) Изслѣдуемъ теперь видъ которой имѣетъ предложенная поверхность.

Для кривой пресѣченія съ плоскостію xy, которой уравненіе есть $z=0$, имѣемъ $Lx^2+My^2=1$, уравненіе *эллипсиса*. Для плоскости параллельной xy, которой уравненіе $z=d$, имѣемъ кривую пресѣченія, выраженную уравненіемъ $Lx^2+My^2=1+Nd^2$, то есть *эллипсисъ*.

Для кривой пресѣченія поверхности съ плоскостію zy, которой уравненіе есть $x=0$, имѣемъ $My^2-Nz^2=1$, уравненіе *иперболы*. Для плоскости параллельной zy, которой уравненіе есть $x=d'$, получимъ кривую пресѣченія выраженную уравненіемъ $My^2-Nz^2=1-Ld'^2$, то есть *иперболу*.

Для кривой пресѣченія поверхности съ плоскостію xz, которой уравненіе есть $y=0$, имѣемъ $Lx^2-Nz^2=1$, уравненіе *иперболы*. Для плоскости параллельной zx, которой уравненіе есть $y=d''$, получимъ кривую пресѣченія, выраженную уравненіемъ $Lx^2-Nz^2=1-Md''^2$, то есть *иперболу*.

Изъ сего изслѣдованія заключимъ, что кривыя пресѣченія предложенной поверхности съ

плоскостями zy и zx, и параллельными онымъ, будутъ иперболы, а съ плоскостію xy и параллельными оной плоскостями, эллипсисы. Поверхность, имѣющая таковое свойство, называется *иперболоидомъ объ одной полѣ;* сія поверхность имѣетъ видъ жолоба и можетъ быть произведена движеніемъ иперболы, имѣющей во всѣхъ ея параллельныхъ положеніяхъ вершину на эллипсисѣ. Фиг. 52.

185) Разсмотримъ теперь третій случай поверхностей втораго порядка, имѣющихъ центръ, то есть поверхность, изображенную уравненіемъ:

$$Lx^2 - My^2 - Nz^2 = 1.$$

Иперболоидъ о двухъ полахъ есть поверхность не сомкнутая.

Изслѣдуемъ, во первыхъ, будетъ или не будетъ сія поверхность сомкнутою. Для сего предположимъ какую ни есть прямую линію, проходящую чрезъ начало координатъ; уравненія ея будутъ: $x = mz$, $y = nz$, гдѣ, поелику сія прямая можетъ принимать всевозможныя положенія, величины m и n неопредѣлены.

Для точекъ пресѣченія сей прямой съ поверхностію, означивъ координаты оныхъ чрезъ x', y', z' получимъ: $Lx'^2 - My'^2 - Nz'^2 = 1$; $x' = mz'$; $y' = nz'$; изъ сихъ уравненій будемъ имѣть: $z' = \frac{1}{\sqrt{Lm^2 - Mn^2 - N}}$; $y' = \frac{n}{\sqrt{Lm^2 - Mn^2 - N}}$; $x' = \frac{m}{\sqrt{Lm^2 - Mn^2 - N}}$, выраженія для координатъ сихъ точекъ пресѣченія.

Общій знаменатель $Lm^2 - Mn^2 - N$ выраженій для координатъ точекъ, въ которыхъ прямая обращаясь около центра встрѣчаетъ поверхность, можетъ обратиться въ нуль, когда $Lm^2 = Mn^2 + N$; изъ чего слѣдуетъ, что координаты сихъ точекъ пресѣченія могутъ быть безконечными, то есть, что существуютъ таковыя положенія сей прямой, въ которыхъ оная пресѣчетъ поверхность въ безконечности, то есть не пресѣчетъ оной; изъ чего и заключимъ, что предложенная даннымъ уравненіемъ поверхность будетъ *несомкнутая*.

Видъ поверхности.

186) Изслѣдуемъ теперь видъ предложенной поверхности.

Для кривой пресѣченія съ плоскостію xy, которой уравненіе есть $z=0$, имѣемъ: $Lx^2 - My^2 = 1$, уравненіе *иперболы*. Для плоскости параллельной xy, которой уравненіе $z=d$, получимъ кривую пресѣченія, изображенную уравненіемъ $Lx^2 - My^2 = 1$, то есть *иперболу*.

Для кривой пресѣченія съ плоскостію zy, которой уравненіе есть $x=0$, имѣемъ: $-My^2 - Nz^2 = 1$, откуда $z = \pm\sqrt{\frac{-1-My^2}{N}}$, *выводъ мнимой*. Для плоскости параллельной zy, которой уравненіе есть $x = d'$, получимъ кривую пресѣченія, выраженную уравненіемъ: $Ld'^2 - My^2 - Nz^2 = 1$, откуда $z = \pm\sqrt{\frac{Ld'^2-(1+My^2)}{N}}$, выводъ, ко-

торый будетъ имѣть дѣйствительную величину когда $1+My^2 < Ld'^2$, и тогда кривая пресѣченія будетъ *эллипсисъ*.

Для кривой пресѣченія поверхности съ плоскостію zx, которой уравненіе есть $y=0$, имѣемъ: $Lx^2 - Nz^2 = 1$, уравненіе *иперболы*. Для плоскости параллельной zx, которой уравненіе есть $y=d'$, получимъ кривую пресѣченія выраженную уравненіемъ: $Lx^2 - Nz^2 = 1 + Md'^2$, то есть *иперболу*.

Изъ сего изслѣдованія заключимъ, что поверхность предложенная даннымъ уравненіемъ пресѣкается съ плоскостями xy и zx, и параллельными онымъ въ иперболахъ, съ плоскостію же zy и параллельными оной плоскостями не пресѣкается до извѣстнаго предѣла, за которымъ кривая ея пресѣченія будетъ эллипсисъ. Изъ свойства предложенной поверхности относительно къ плоскости zy и параллельнымъ оной плоскостямъ слѣдуетъ, что сія поверхность будетъ составлена изъ двухъ частей, или полъ, отдѣленныхъ между собою; кратчайшее разстояніе между сими двумя полами будетъ находиться на прямой перпендикулярной къ плоскости zy, то есть на оси x. Фиг. 53.

Изслѣдованная нами поверхность называется *иперболоидомъ о двухъ полахъ* (*).

(*) О конусахъ, служащихъ асимптотами иперболоиду объ одной полѣ и иперболоиду о двухъ полахъ,

О ПЛОСКОСТЯХЪ, КАСАТЕЛЬНЫХЪ КЪ ПОВЕРХНОСТЯМЪ ВТОРАГО ПОРЯДКА.

Уравненіе касательной плоскости къ поверхностямъ втораго порядка имѣющимъ центръ, въ случаѣ когда дана точка касанія.

187) Всѣ прямыя, касательныя въ тойже точкѣ къ какой ни есть поверхности, составятъ поверхность, которая будетъ касательною къ поверхности въ сей точкѣ. Предложимъ вопросъ вывести уравненіе таковой поверхности, касательной въ какой ни есть точкѣ, данной на поверхностяхъ втораго порядка имѣющихъ центръ.

Для сего примемъ въ разсужденіе уравненіе сихъ поверхностей; оное есть: (177)

$$lx'^2 + my'^2 + nz'^2 + px'y' + qx'z' + ry'z' = s;$$

сіе уравненіе можетъ принять (178) слѣдующій простѣйшій видъ:

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 1;$$

пусть координаты точки касанія будутъ α, β и γ; поелику сія точка должна находиться на поверхности, то мы и получимъ условіе:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 1 \ldots\ldots (3).$$

о случаяхъ, въ которыхъ общее уравненіе поверхностей втораго порядка представляетъ мнимыя поверхности, и систему пресѣкающихся линій и плоскостей, также о поверхностяхъ втораго порядка неимѣющихъ центра, равно какъ и о діаметральныхъ плоскостяхъ поверхностей, можно читать *Вышнюю Геометрію въ пространствахъ*, сочиненіе Г. Маюрова.

Уравненія прямой, проведенной какъ ни есть чрезъ точку касанія будутъ $x - \alpha = a(z - \varepsilon)$ и $y - \zeta = b(z - \varepsilon)$, гдѣ a и b неопредѣлены. Для точекъ пресѣченія сей прямой съ поверхностію, ея уравненія, условіе (s), и уравненіе поверхности будутъ существовать въ тоже время. Соединивъ уравненіе поверхности съ условіемъ (s), получимъ:

$$L(x^2 - \alpha^2) + M(y^2 - \zeta^2) + N(z^2 - \varepsilon^2) = 0, \text{ или}$$
$$L(x+\alpha)(x-\alpha) + M(y+\zeta)(y-\zeta) + N(z+\varepsilon)(z-\varepsilon) = 0;$$

введя въ сіе уравненіе вмѣсто $x - \alpha$ и $y - \zeta$ величины оныхъ, извлеченныя изъ уравненій предположенной прямой, будемъ имѣть:

$$[La(x+\alpha) + Mb(y+\zeta) + N(z+\varepsilon)](z-\varepsilon) = 0,$$

уравненіе, существующее для точекъ пресѣченія предложенной прямой съ поверхностію, гдѣ x, y и z означаютъ координаты сихъ точекъ. Сіе уравненіе удовлетворяется положеніемъ $z = \varepsilon$, что даетъ въ уравненіяхъ прямой $x = \alpha$ и $y = \zeta$, и такъ одна изъ точекъ пресѣченія есть данная точка касанія, что и быть должно, ибо прямая предположена проходящею чрезъ точку касанія. Уничтоживъ $z - \varepsilon$, будемъ имѣть:

$$La(x+\alpha) + Mb(y+\zeta) + N(z-\varepsilon) = 0.$$

Чтобы прямая касалась къ поверхности должно, чтобы другая точка ея пресѣченія съ поверхностію совпала съ точкою касанія; сіе

выразится чрезъ положенія: $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$, которыя введя въ уравненіе, получимъ:

$$L\alpha + M\beta + N\gamma = 0,$$

условіе, выражающее что прямая касается къ поверхности. Поелику сіе уравненіе недостаточно къ опредѣленію двухъ величинъ a и b, то изъ сего слѣдуетъ, что одна изъ нихъ можетъ быть взята произвольно, или имѣть безчисленное множество величинъ, изъ чего заключимъ, что существуетъ безчисленное множество прямыхъ, касательныхъ въ тойже точкѣ къ поверхности.

Введя въ условіе касанія вмѣсто a и b выраженія оныхъ въ неопредѣленныхъ x, y и z, извлеченныя изъ уравненій прямой, получимъ уравненіе показывающее свойство всѣхъ прямыхъ, касательныхъ въ тойже точкѣ къ поверхности, а потому выражающее свойство поверхности, заключающей всѣ сіи прямыя, то есть уравненіе касательной поверхности; оное будетъ:

$$L\alpha(x-\alpha) + M\beta(y-\beta) + N\gamma(z-\gamma) = 0 \ldots\ldots\ldots (q).$$

Сіе уравненіе есть отношеніе первой степени между неопредѣленными x, y, и z, а посему можетъ принять видъ $Ax + By + Cz = D$ уравненія плоскости, изъ чего и заключимъ что сія касательная поверхность есть плоскость. И такъ *касательною плоскостію* въ

какой ни есть точкѣ къ поверхности, называется плоскость проходящая чрезъ всѣ касательныя въ сей точкѣ къ поверхности. Уравненіе (q) есть уравненіе касательной плоскости къ поверхностямъ втораго порядка имѣющимъ центръ; α, $\mathfrak{C}$, и ε суть координаты данной точки касанія. Сіе уравненіе можетъ принять видъ:

$$L\alpha x + M\mathfrak{C}y + N\varepsilon z = L\alpha^2 + M\mathfrak{C}^2 + N\varepsilon^2$$ и замѣтивъ что имѣемъ (s).. $L\alpha^2 + M\mathfrak{C}^2 + N\varepsilon^2 = 1$, обратится въ

$$L\alpha x + M\mathfrak{C}y + N\varepsilon z = 1.$$

Уравненія нормальной къ поверхностямъ втораго порядка, имѣющимъ центръ.

188) Поелику *нормальною* къ поверхности называется прямая проходящая чрезъ точку касанія, перпендикулярно къ плоскости, касательной къ поверхности въ сей точкѣ, то весьма легко вывести ея уравненія.

Нормальная должна проходить чрезъ точку касанія, почему уравненія ея будутъ имѣть видъ:

$$x - \alpha = a'(z - \varepsilon) \text{ и } y - \mathfrak{C} = b'(z - \varepsilon);$$

оная должна быть перпендикулярна къ касательной плоскости, которой уравненіе есть:

$$L\alpha(x - \alpha) + M\mathfrak{C}(y - \mathfrak{C}) + N\varepsilon(z - \varepsilon) = 0,$$

почему и получимъ условія перпендикулярности:

$$1 - \frac{N\varepsilon}{L\alpha}a' = 0, \text{ и } 1 - \frac{N\varepsilon}{M\mathfrak{C}}b' = 0, \text{ откуда}$$

$$a' = \frac{L\alpha}{N\varepsilon} \text{ и } b' = \frac{M\mathfrak{C}}{N\varepsilon}; \text{ посему будемъ}$$

имѣть:

$$x - \alpha = \frac{L\alpha}{N\gamma}(z - \gamma) \text{ и } y - \beta = \frac{M\beta}{N\gamma}(z - \gamma),$$

уравненія нормальной къ поверхностямъ втораго порядка имѣющимъ центръ.

189) Уравненія для касательной плоскости и нормальной къ данной ея частнымъ уравненіемъ какой либо изъ поверхностей втораго порядка, имѣющихъ центръ, могутъ быть выведены, сравнивая уравненіе $Lx^2 + My^2 \; Nz^2 = 1$ сихъ поверхностей вообще, съ уравненіемъ предложенной поверхности, и поставивъ потомъ въ общія уравненія касательной плоскости и нормальной, частныя величины M, N, и L предстоящихъ при предложенной поверхности.

Всѣ нормальныя къ поверхности вращенія встрѣчаютъ ось сей поверхности.

190) Въ случаѣ когда предложенная поверхность будетъ поверхностію вращенія, напримѣръ около оси z, всѣ сѣченія поверхности плоскостями параллельными плоскости xy, а потому перпендикулярными къ сей оси, и самою плоскостію xy, должны быть круги; почему въ уравненіи $Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 1$ поверхностей втораго порядка имѣющихъ центръ будемъ имѣть $L = M$, и въ семъ случаѣ уравненія нормальной (188) будутъ:

$$x - \alpha = \frac{L\alpha}{N\gamma}(z - \gamma) \text{ и } y - \beta = \frac{L\beta}{N\gamma}(z - \gamma),$$

уравненія нормальной къ поверхности вращенія въ точкѣ, коей координаты суть α, β, γ; ось поверхности есть ось z.

Опредѣлимъ точки пресѣченія проэкцій нормальной съ осью z; для сего положимъ $x=o$ въ уравненіи проэкціи оной на плоскости zx, и $y=o$ въ уравненіи ея проэкціи на плоскости zy; изъ сихъ уравненій будемъ имѣть: $z=\gamma-\frac{N\gamma}{\alpha}$, туже величину для z, что и показываетъ, что проэкціи нормальной встрѣтятъ ось z поверхности вращенія въ той же точкѣ, и именно въ точкѣ, величину для координаты z коей мы вывели, а посему и самая нормальная встрѣтитъ въ сей точкѣ ось поверхности вращенія. Сіе свойство, по которому нормальная къ поверхности вращенія встрѣчаетъ ось сей поверхности, есть общее всѣмъ поверхностямъ вращенія.

Опредѣлить аналитически положеніе касательной плоскости къ поверхностямъ втораго порядка имѣющимъ центръ, когда даны для сей плоскости двѣ точки

191) Положимъ, что требуется опредѣлить положеніе касательной плоскости, проведенной чрезъ двѣ данныя точки внѣ поверхности, къ поверхностямъ втораго порядка, имѣющимъ центръ.

Для сего, пусть координаты двухъ данныхъ точекъ будутъ α', $\mathfrak{C}'$, ε' и α'', $\mathfrak{C}''$, ε''; сіи точки должны находиться на искомой касательной плоскости, почему ихъ координаты будутъ удовлетворять уравненію сей плоскости, которое есть $L\alpha x+M\mathfrak{C}y+N\varepsilon z=1$..... (187); въ семъ уравненіи α, $\mathfrak{C}$, ε суть координаты точки касанія, которыя намъ и опредѣлить должно изъ условій вопроса.

внѣ поверхности.

Первыя два условія вопроса, и о которыхъ мы предъ симъ сказали, будутъ:

$$L\alpha\alpha' + M\beta\beta' + N\gamma\gamma' = 1; \ldots\ldots (A)$$
$$L\alpha\alpha'' + M\beta\beta'' + N\gamma\gamma'' = 1;$$

поелику же точка касанія находится на поверхности, то ея координаты должны удовлетворять уравненію поверхности, которое есть $Lx^2 + My^2 + Mz^2 = 1$, почему и получимъ третіе условіе вопроса:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 1.$$

Изъ сихъ трехъ условій вопроса опредѣлимъ три искомыя координаты α, β, и γ точки касанія; послѣ чего и искомая касательная плоскость совершенно опредѣлена будетъ. Дабы вывести ея уравненіе остается токмо поставить опредѣленныя величины для α, β, и γ координатъ точки касанія, въ уравненіе касательной плоскости:

$$L\alpha x + M\beta y + N\gamma z = 1.$$

Вывести уравненія кривой линіи отдѣла свѣта отъ тѣни, на поверхностяхъ втораго порядка, и имѣю-

192) Естьлибы дана была токмо одна точка, на примѣръ первая, коей координаты α', β', γ' и требовалось бы чрезъ оную провести касательную плоскость къ тѣмъ же поверхностямъ, тогда для опредѣленія координатъ α, β, γ точки касанія, имѣли бы токмо два уравненія: (A) и $L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 1$. Сіе показываетъ, что одна изъ величинъ α, β, и γ будетъ произвольна, а посему можетъ имѣть

безчисленное множество величинъ, то есть, что будетъ существовать безчисленное множество плоскостей удовлетворяющихъ вопросу, то есть проходящихъ чрезъ данную точку и касательныхъ къ предложеннымъ поверхностямъ.

щихъ центръ и освѣщенныхъ свѣтящеюся точкою.

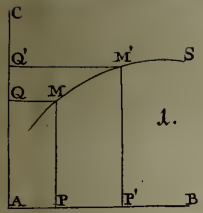
Вообразивъ, что въ каждой изъ сихъ плоскостей данная точка соединена прямою съ точкою касанія сей плоскости, получимъ таковое же число прямыхъ проходящихъ чрезъ данную точку, касательныхъ къ предложенной поверхности. Всѣ сіи прямыя образуютъ конусъ, обертывающій поверхность изъ данной точки; кривая линія проходящая чрезъ точки касанія всѣхъ сихъ прямыхъ, будетъ кривою касанія сего конуса къ предложенной поверхности, а по сему, по предположеніи, что данная точка внѣ поверхности есть свѣтящаяся, сія кривая будетъ кривою линіею отдѣла свѣта отъ тѣни.

Чтобы вывести уравненія проэкцій сей кривой, должно опредѣлить отношенія между координатами какой ни есть изъ ея точекъ, бравъ сіи координаты попарно; а по сему изключивъ поперемѣнно α, β, и γ изъ уравненій: (A) и $L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 1$, получимъ уравненія проэкцій сей кривой на плоскостяхъ xy, zx, и xy. Поелику уравненія: (A) и $L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 1$ суть одно первой степени, а другое второй, то явно, что уравненія про-

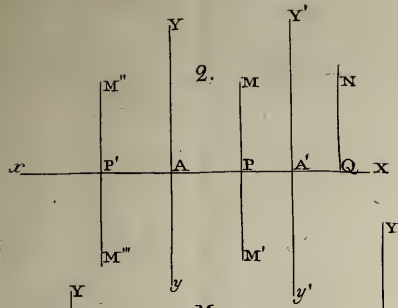
экцій сей кривой будутъ также второй степени, а по сему кривая линія отдѣла свѣта отъ тѣни на поверхностяхъ втораго порядка, имѣющихъ центръ, и освѣщенныхъ свѣтящеюся точкою будетъ коническое сѣченіе.

ЗАМѢЧАННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

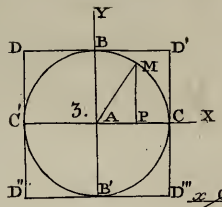
Стран.	*Строк.*	*Напечатано:*	*Читай:*
52	5	$\frac{sin.(\omega-\psi)}{sin.u}$	$\frac{sin.(\omega-\psi)}{sin.\omega}$
76	2 снизу	$cos.^2\varphi - cos.^2\psi$	$cos.^2\varphi . cos.^2\psi$
142	2 снизу	$+$	$-$
149	14	выраженія	выраженіе
172	13	t^2	t'^2
173	6 и 18	u^2	u'^2
195	8	$\frac{sin.\psi\ sin.(\vartheta+\Phi)}{sin.\Phi\ sin.(\Phi+\vartheta)}$	$\frac{sin.\psi\ sin.(\Phi+\psi)}{sin.\vartheta\ sin.(\Phi+\vartheta)}$



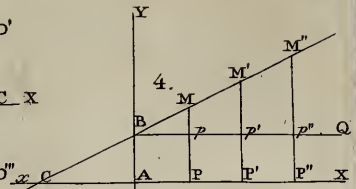
1.



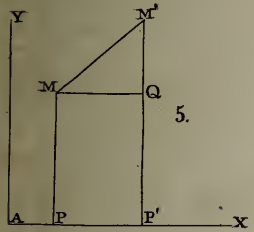
2.



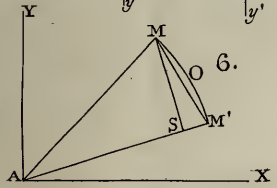
3.



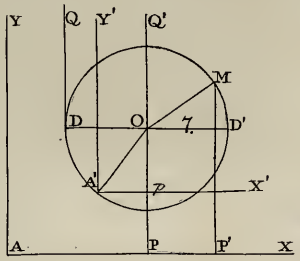
4.



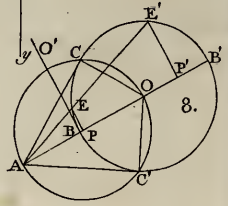
5.



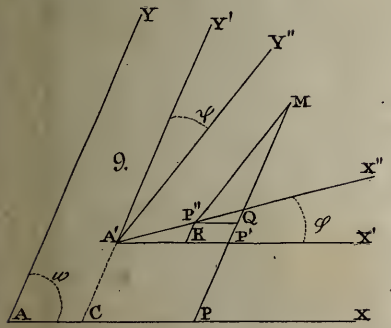
6.

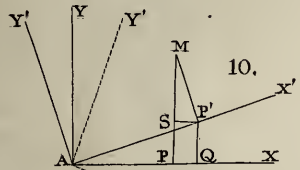


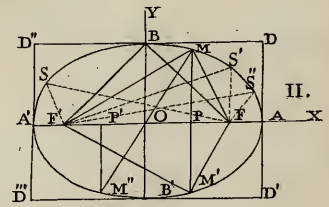
7.



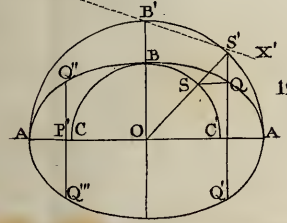
8.

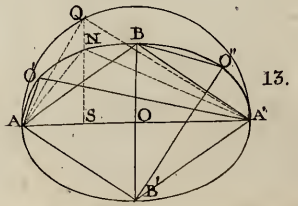




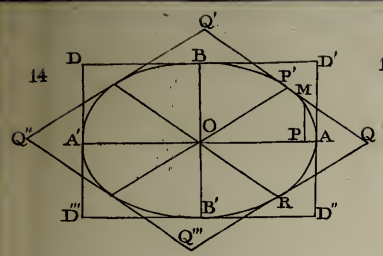


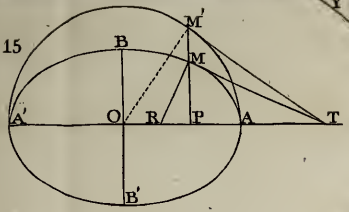
11.

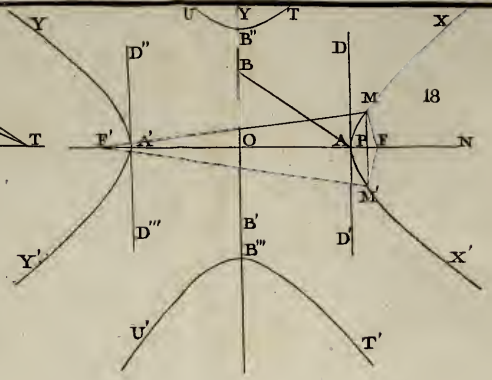


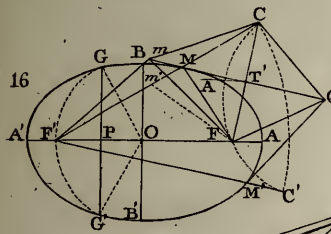


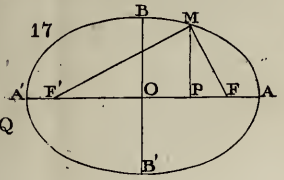
13.

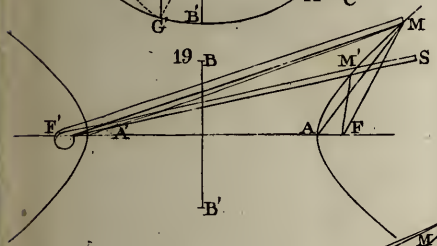

14
Q'
D
B
D'
P'
M
Q''
A'
O
P
A
Q
D'''
B'
R
D''
Q'''

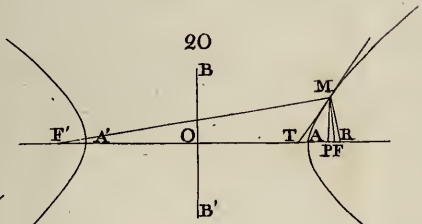

15
M'
B
M
A'
O
R
P
A
T
B'

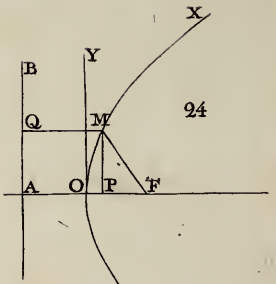

Y
U
Y
T
X
D''
B''
D
B
18
M
F'
A'
O
A
P
F
N
M'
D'''
B'
D'
Y'
X'
B'''
U'
T'

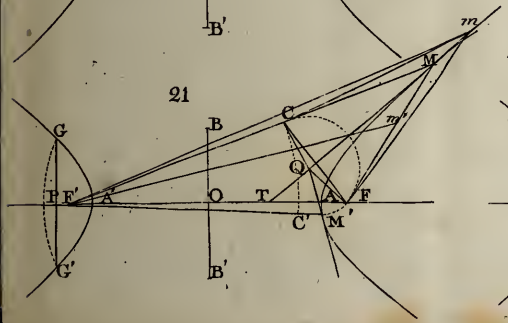

C
G
B
m
M
16
m'
T'
A
Q
A'
F'
P
O
F
A
M'
C'
G'
B'

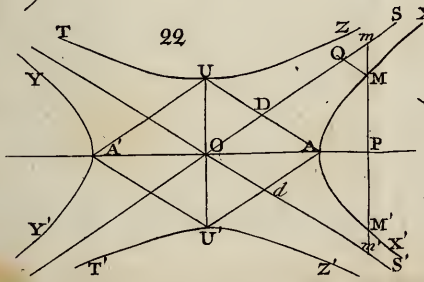

17
B
M
A'
F'
O
P
F
A
B'

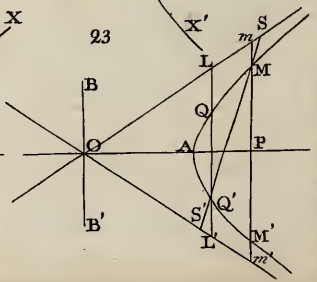

19
M
B
M'
S
F'
A'
A
F
B'

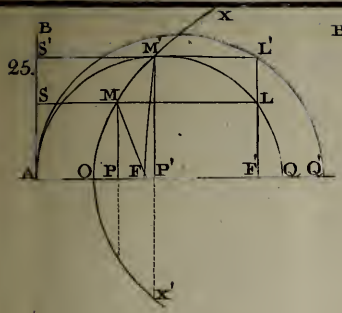

20
B
M
F'
A'
O
T
A
R
PF
B'

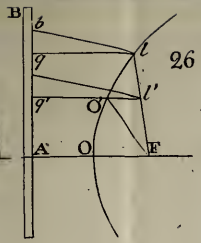

X
B
Y
24
Q
M
A
O
P
F

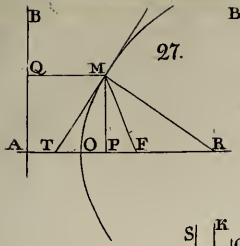

m
M
21
G
B
C
m'
Q
F
F'
A'
O
T
A
F
C'
M'
G'
B'

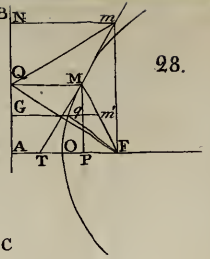

T
22
Z
m
S
X
Q
Y
U
D
M
A'
O
A
P
d
Y'
M'
U'
X'
m'
T'
Z'
S'

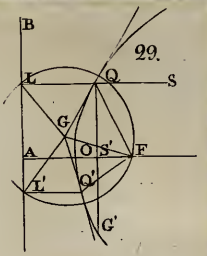

X'
S
m
23
L
M
B
Q
O
A
P
S'
Q'
B'
L'
M'
m'

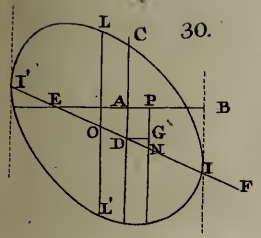

25.
B
S'
M'
L'
X
S
M
L
A
O
P
F
P'
F'
Q
Q'
X'

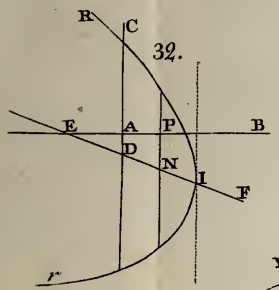

B
b
l
26
q
l'
q'
O'
A
O
F

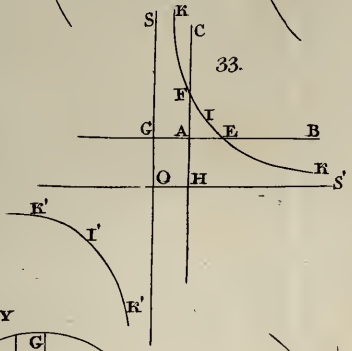

B
Q
M
27.
A
T
O
P
F
R

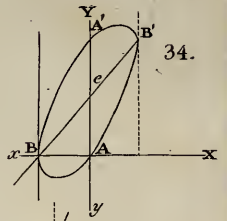

B
N
m
Q
M
28.
G
q
m'
A
T
O
P
F

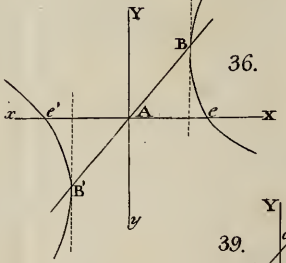

B
29.
L
Q
S
G
A
O
S'
F
L'
Q'
G'

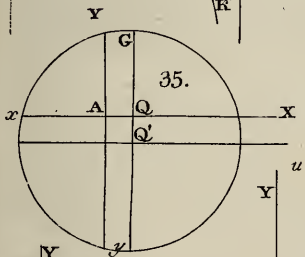

L
C
30.
I'
E
A
P
B
O
D
G
N
I
F
L'

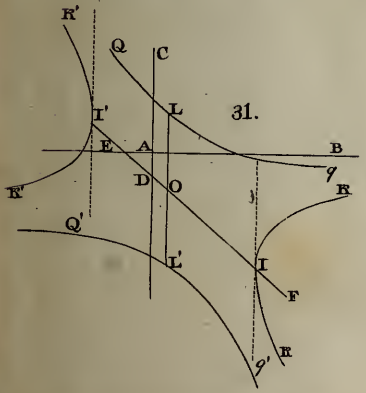

R
C
32.
E
A
P
B
D
N
I
F
r

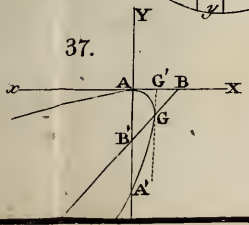

S
K
C
33.
F
I
G
A
E
B
O
H
K'
S'
E'
I'
K'

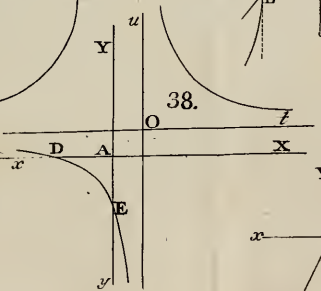

Y
A'
B'
34.
e
x
B
A
X
y

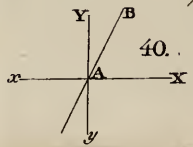

Y
B
36.
x
e'
A
e
X
B'
y

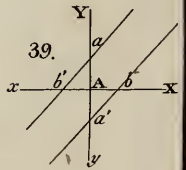

Y
G
35.
x
A
Q
X
Q'
y

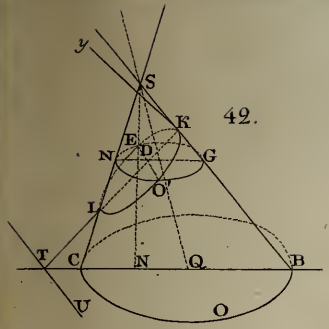

R'
Q
C
I'
L
31.
E
A
B
D
O
q
R
R'
Q'
L'
I
F
q'
R


Y
37.
x
A
G'
B
X
B'
G
A'

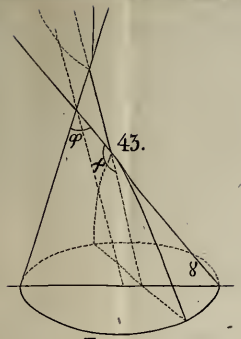

u
Y
38.
O
l
D
A
X
x
E
y


Y
B
40.
x
A
X
y

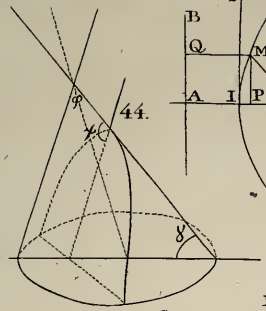

Y
a
39.
x
b'
A
b
X
a'
y



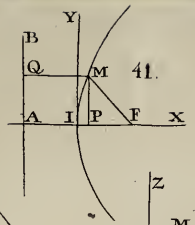
42.



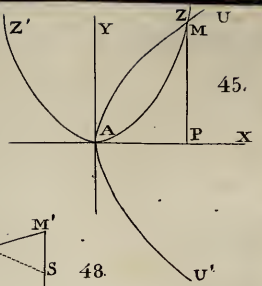
43.



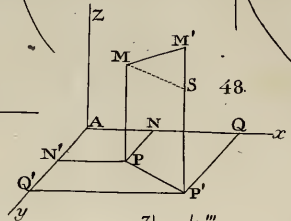
44.



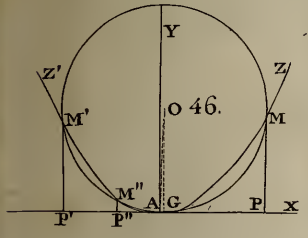
41.



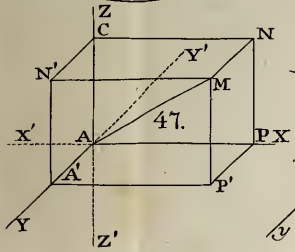
45.



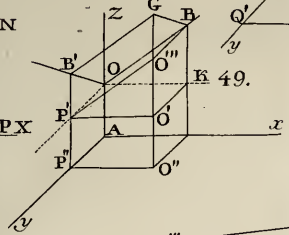
48.



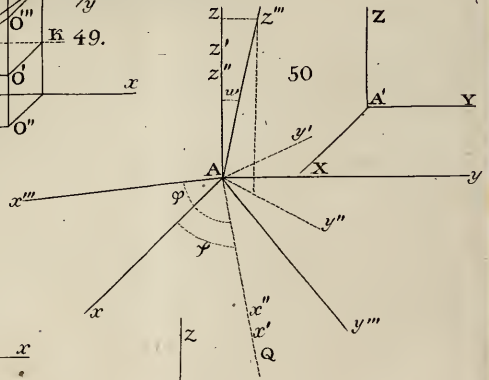
46.



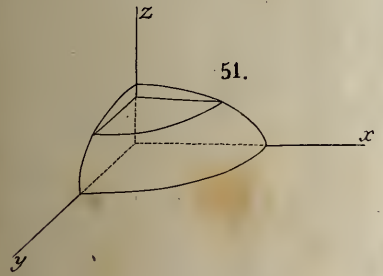
47.



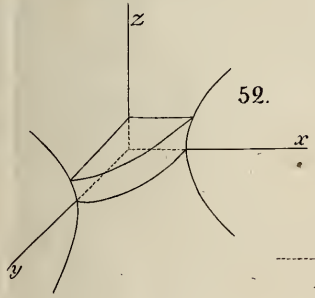
49.



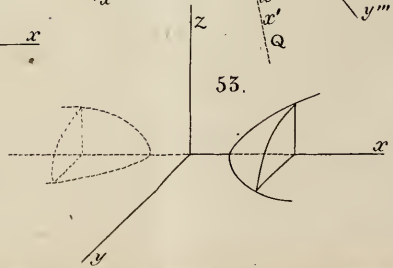
50



51.



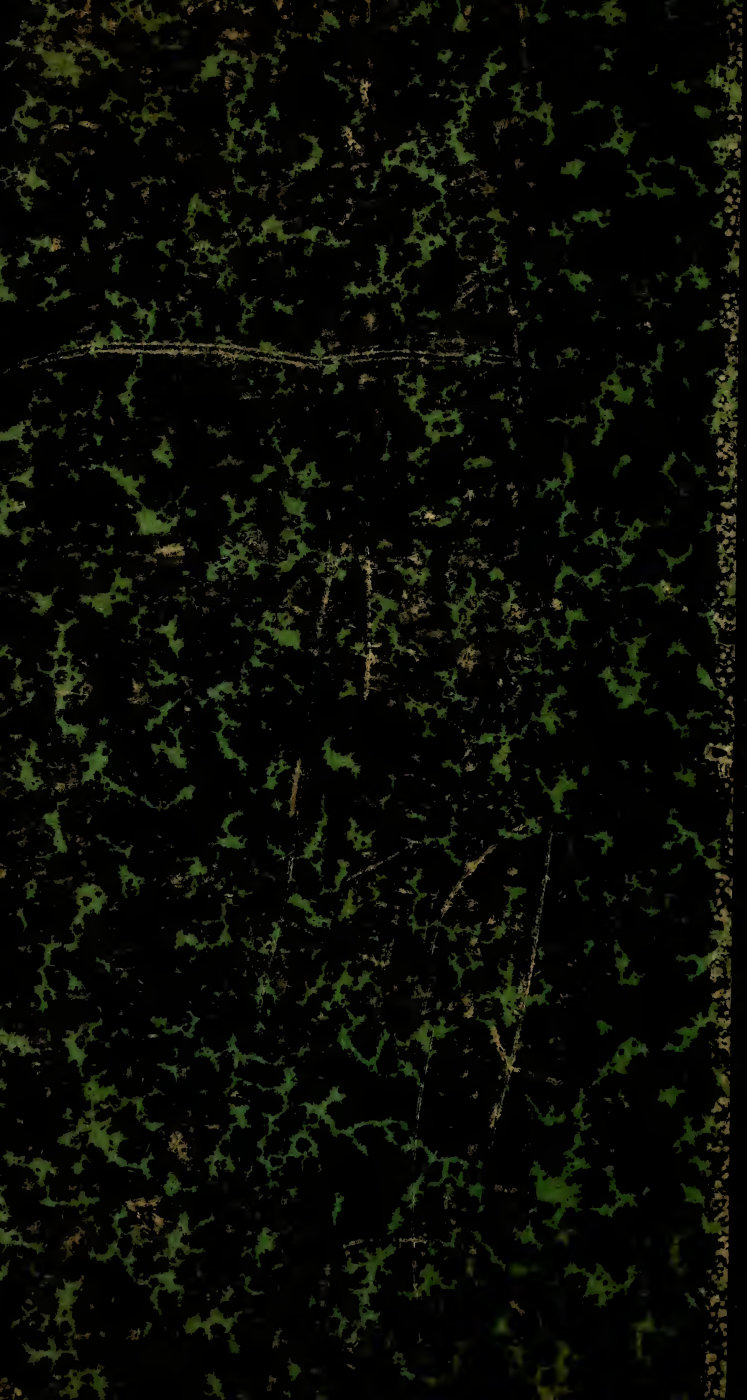
52.



53.

THE LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF
NORTH CAROLINA
AT CHAPEL HILL

RARE BOOK COLLECTION

The André Savine Collection

QA551
.S492
1819